I appello - 29 Giugno 2001

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione

$$f_n(x) = nx^2(1-x^2)^n,$$

con $x \in [-1, 1]$.

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y'(x) = \frac{xy^2 - 4x^3 + y^3}{xy^2}$$

con $y(1) = 2$.

3) Calcolare il volume del solido dato dall' intersezione di

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

e

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Svolgimento

1) Studiamo la convergenza puntuale. Poiché ogni funzione della successione è pari, è sufficiente studiare il comportamento per le $x \in [0, 1]$.

Per i valori $x = 0,\ x = 1$ si ha che $f_n(x) = 0$ quindi la funzione limite risulta uguale a $f(0) = 0,\ f(1) = 0$.

Invece per ogni $x \in]0, 1[$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} nx^2(1-x^2)^n = 0$$

poiché il fattore $(1-x^2)^n$ (che ha base minore di 1) tende a zero più velocemente di quanto nx^2 tende a $+\infty$. Quindi la funzione limite vale $f \equiv 0$.

Studiamo la convergenza uniforme e calcoliamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |nx^2(1-x^2)^n| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} nx^2(1-x^2)^n.$$

Studiamo l'estremo superiore calcolando la derivata di $nx^2(1-x^2)^n$.

Si ha

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n2x(1-x^2)^n + nx^2n(1-x^2)^{n-1}(-2x) \\ &= 2nx(1-x^2)^n - 2n^2x^3(1-x^2)^{n-1} \\ &= 2nx(1-x^2)^{n-1}(1-x^2-nx^2) \\ &= 2nx(1-x^2)^{n-1}(1-x^2(n+1)). \end{aligned}$$

La derivata si annulla quindi nei punti

$$x=0,\ x=1,\ x=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

e si ha

$$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > x^2(n+1) \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Quindi

$$\sup_{x\in[0,1]} nx^2(1-x^2)^n = n\frac{1}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^n$$

e infine

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to+\infty}[(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}]^{\frac{n}{n+1}} = e^{-1} \neq 0.$$

Quindi la convergenza non è uniforme.

2) L'equazione differenziale risulta del primo ordine.

Controlliamo se $f(x,y)$ è omogenea di grado zero.

$$f(kx,ky)=\frac{kxk^2y^2-4k^3x^3+k^3y^3}{kxk^2y^2}=\frac{k^3xy^2-4k^3x^3+k^3y^3}{k^3xy^2}=\frac{xy^2-4x^3+y^3}{xy^2}=f(x,y).$$

Quindi risulta un'equazione differenziale di Manfredi. Dividendo per x^3 si ottiene

$$y'=\frac{(\frac{y}{x})^2-4+(\frac{y}{x})^3}{(\frac{y}{x})^2}.$$

Ponendo $\dfrac{y}{x}=t\Leftrightarrow y=tx$ si ha

$$dy=tdx+xdt\Rightarrow\frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}$$

e

$$t+x\frac{dt}{dx}=\frac{t^2-4+t^3}{t^2}\Leftrightarrow x\frac{dt}{dx}=\frac{t^2-4+t^3}{t^2}-t\Leftrightarrow\frac{t^2dt}{t^2-4}=\frac{dx}{x}$$

ovviamente per $t^2-4\neq 0$. Integrando abbiamo

$$\begin{aligned}\int\frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt=\log|x|+C\quad&\Leftrightarrow\quad\int(1+\frac{4}{t^2-4})dt=\log|x|+C\\ &\Leftrightarrow\quad t+4\int\frac{1}{(t-2)(t+2)}dt=\log|x|+C.\end{aligned}$$

Poiché

$$\frac{1}{(t-2)(t+2)}=\frac{1}{4(t-2)}-\frac{1}{4(t+2)}$$

si ottiene

$$t+\log|t-2|-\log|t+2|=\log|x|+C\Leftrightarrow t+\log|\frac{t-2}{t+2}|=\log|x|+C.$$

Sostituendo $t=\dfrac{y}{x}$ risulta

$$\frac{y}{x}+\log|\frac{y-2x}{y+2x}|=\log|x|+C.$$

Queste sono le soluzioni ottenute per $t^2 - 4 \neq 0$, cioè $\frac{y^2}{x^2} \neq 4$.

Risolvendo si ha $y \neq \pm 2x$.

In entrambi i casi le funzioni $y = 2x$ e $y = -2x$ risultano essere soluzioni dell'equazione differenziale (controllare !). Ricapitolando le soluzioni sono

$$y = \pm 2x$$

e

$$\frac{y}{x} + \log\left|\frac{y-2x}{y+2x}\right| = \log|x| + C.$$

Per concludere la soluzione che verifica $y(1) = 2$ è $y = 2x$.

3) Si ottiene che la base del cilindro è interna alla sfera.

In questo caso per simmetria possiamo considerare metà volume dato da

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy.$$

Passando in coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}
& \int\int_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^1 d\varrho \int_0^{2\pi} \sqrt{4-\varrho^2}\,\varrho dt \\
= \quad & 2\pi \int_0^1 \varrho\sqrt{4-\varrho^2}\,d\varrho = 2\pi(-\frac{1}{2}) \int_0^1 (-2)\varrho\sqrt{4-\varrho^2}\,d\varrho \\
= \quad & -\pi \left[\frac{(4-\varrho^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\pi[(4-\varrho^2)^{3/2}]_0^1 \\
= \quad & -\frac{2\pi}{3}[(4-1)^{3/2} - 4^{3/2}] = \frac{2\pi}{3}[8 - \sqrt{3^3}] = \frac{2\pi}{3}[8 - 3\sqrt{3}].
\end{aligned}$$

II appello - 11 Luglio 2001

1) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ esiste l'integrale generalizzato

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x|1-x|^\alpha}\ dx.$$

2) Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_E \frac{|x|}{(x^2+y^2)^2}\ dxdy,$$

dove E risulta l'insieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato dalle rette $y=2,\ y=\frac{x}{2}+1$, $y=-\frac{x}{2}+1$.

3) Stabilire se la seguente forma differenziale lineare

$$x^y\ (\frac{y}{x}\ dx + \log x\ dy)$$

è un differenziale esatto e, in caso positivo, determinarne le primitive nel suo insieme di definizione.

Svolgimento

1) La funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x|1-x|^\alpha}$$

non risulta definita nei punti $x=0$ e $x=1$.

Analizziamo il punto $x=0$.

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x|1-x|^\alpha} = 1$$

per ogni $\alpha \in I\!R_0^+$, quindi risulta estendibile con continuità.

Analizziamo ora il punto $x = 1$.

Si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x|1-x|^\alpha} = \sin 1 \lim_{x\to 1} \frac{1}{|1-x|^\alpha} = \begin{cases} \sin 1 & , \ \alpha = 0 \\ +\infty & , \ \alpha > 0. \end{cases}$$

Quindi la funzione f risulta illimitata solo in prossimità di $x = 1$ per $\alpha > 0$. Consideriamo $0 < \alpha < 1$ e confrontiamo con la funzione $\dfrac{1}{|1-x|^\alpha}$. Si ottiene

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\sin x}{x|1-x|^\alpha}}{\frac{1}{|1-x|^\alpha}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = \sin 1.$$

Quindi $f(x)$ è di ordine α con $0 < \alpha < 1$ rispetto alla funzione $\dfrac{1}{|1-x|}$, perciò risulta integrabile.

Se invece $\alpha \geq 1$, confrontando sempre con $\dfrac{1}{|1-x|^\alpha}$ otteniamo che $f(x)$ risulta di ordine α con $\alpha \geq 1$ rispetto a $\dfrac{1}{|1-x|^\alpha}$, quindi non è integrabile.

2) Poiché la funzione è pari rispetto x, cioè $f(x, y) = f(-x, y)$, e l'insieme E risulta simmetrico rispetto all'asse x, possiamo considerare l'integrale solo sulla parte di E che si trova nel I quadrante.

L'integrale complessivo risulterà il doppio di questo valore.

Ponendo

$$E_1 = \{(x, y) \in I\!R^2 : 1 \leq y \leq 2, \ 0 \leq x \leq 2y - 2\},$$

possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} \int\int_E \frac{|x|}{(x^2+y^2)^2} dxdy &= 2\int\int_{E_1} \frac{x}{(x^2+y^2)^2} dxdy \\ &= 2\int_1^2 dy \int_0^{2y-2} \frac{x}{(x^2+y^2)^2} dx \\ &= \int_1^2 dy \int_0^{2y-2} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^2 dy \left[-\frac{1}{(x^2+y^2)}\right]_0^{2y-2} \\
&= \int_1^2 \left(-\frac{1}{(2y-2)^2+y^2}+\frac{1}{y^2}\right)dy \\
&= \int_1^2 \left(-\frac{1}{4y^2+4-8y+y^2}+\frac{1}{y^2}\right)dy \\
&= \int_1^2 \left(-\frac{1}{5y^2-8y+4}\right)dy + \int_1^2 \frac{1}{y^2}dy \\
&= -\int_1^2 \frac{1}{5y^2-8y+4}dy + \left[-\frac{1}{y}\right]_1^2 \\
&= -\int_1^2 \frac{1}{5y^2-8y+4}dy + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Per risolvere l'integrale, determiniamo le soluzioni di

$$5y^2 - 8y + 4 = 0.$$

Si ha

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{5} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{5} = \frac{4}{5} \pm \frac{2}{5}i.$$

Otteniamo allora

$$-\int_1^2 \frac{1}{5y^2-8y+4}dy + \frac{1}{2} = -\left[\frac{5}{2}\arctan\frac{x-\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}}\right]_1^2 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}[\arctan 3 - \arctan\frac{1}{2}] + \frac{1}{2}.$$

3) In questo caso si ha

$$X(x,y) = x^{y-1}y$$

e

$$Y(x,y) = x^y \log x.$$

Il dominio per entrambe le funzioni risulta

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

che è semplicemente connesso. Studiamo la chiusura. Si ha

$$X'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\log x$$

e

$$Y'_x = yx^{y-1}\log x + x^y \frac{1}{x}.$$

Cosí la forma differenziale risulta chiusa in un insieme convesso e quindi è esatta.

Determiniamo le primitive $F(x, y)$. Poiché risulta

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yx^{y-1},$$

integrando otteniamo

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int yx^{y-1}dx \\ &= y\int x^{y-1}dx + h(y) \\ &= y\frac{x^y}{y} + h(y) \\ &= x^y + h(y). \end{aligned}$$

Derivando però rispetto a y si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^y \log x + h'(y) = x^y \log x,$$

e quindi

$$h'(y) = 0,$$

da cui

$$h(y) = costante.$$

Le primitive sono allora date da

$$F(x, y) = x^y + C.$$

III appello - 10 Settembre 2001

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n},$$

calcolandone la somma.

2) Si determinino i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1,$$

nell'insieme $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9\}$.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''' - y = xe^x.$$

Svolgimento

1) Se $x = 0$ la serie converge a zero.

Altrimenti risulta

$$x\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{x+1})^n$$

che è una serie geometrica di ragione

$$(1+x)^{-1}.$$

La convergenza si ha, quindi, per

$$\frac{1}{|x+1|} < 1$$

cioè

$$|x+1| > 1.$$

Discutendo il modulo si ha

$$x+1 > 1 \text{ oppure } x+1 < -1$$

cioè

$$x > 0 \text{ oppure } x < -2.$$

La serie converge dunque in

$$]-\infty,-2[\,\cup\,[0,+\infty[= \ A.$$

La somma è data da

$$S(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x[\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}} - 1] = 1 & , x \in A \setminus \{0\}. \end{cases}$$

La serie non può convergere uniformemente in $[0,+\infty[$ poiché le f_n sono continue mentre la somma è discontinua.

Per quanto riguarda l'insieme $]-\infty,-2[$ si ha che, siccome per $x \to -2$ il termine generale della serie non tende a zero, si contraddice il criterio di Cauchy e quindi la serie non converge uniformemente.

2) Essendo una funzione continua definita in un insieme compatto, per il teorema di Weierstrass sicuramente esistono il massimo ed il minimo assoluti.

Studiamo la funzione in C°.

Si ha, per $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$x = 0,$$

mentre dalla seconda si ha

$$y(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2) = 0$$

da cui

$$y = 0,$$

e poiché $(0,0)$ non fa parte del dominio della derivata, il sistema non ha punti critici.

Inoltre risultando

$$f(0,0) = -1$$

e

$$\sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1 \geq -1$$

se ne deduce che $(0,0)$ è un minimo assoluto.

Quindi il massimo assoluto, che esiste, non è assunto nei punti interni; si deve ricercarlo allora sulla frontiera che è data dai punti

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Possiamo parametrizzare la frontiera nel seguente modo

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t, \end{cases}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Allora la funzione ristretta alla curva risulta

$$g(t) = \sqrt{9} + 9\sin^2 t - 1 = 9\sin^2 t + 2.$$

I massimi e minimi di $g(t)$ sono i massimi e minimi di $\sin^2 t$ e quindi li otteniamo rispettivamente nei punti

$$t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

e

$$t = 0,\ \pi,\ 2\pi.$$

Nei punti $t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ si ha

$$g(t) = 9 + 2 = 11$$

e rappresentano i punti di massimo assoluto assunti rispettivamente in $(0, 3)$ e $(0, -3)$. I rimanenti punti di minimo invece assumono valore più grande di -1 e quindi l'unico punto di minimo assoluto è il punto (00).

3) Si tratta di una equazione differenziale del terzo ordine a coefficienti costanti. La corrispondente equazione caratteristica risulta

$$\alpha^3 - 1 = 0.$$

Poiché

$$\alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0,$$

le soluzioni sono date da

$$\alpha_1 = 1$$

e

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le corrispondenti soluzioni sono allora

$$y_1(x) = e^x,$$

$$y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

e

$$y_3(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare.

Poiché 1 risulta soluzione dell'equazione caratteristica si deve porre

$$y(x) = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Derivando si ottiene

$$y'(x) = 2Axe^x + Be^x + Ax^2e^x + Bxe^x,$$

$$y''(x) = 2Ae^x + 2Axe^x + Be^x + 2Axe^x + Ax^2e^x + Be^x + Bxe^x$$

e

$$y'''(x) = 6Ae^x + 3Be^x + 6Axe^x + Ax^2e^x + Bxe^x.$$

Sostituendo otteniamo

$$6Ae^x + 3Be^x + 6Axe^x + Ax^2e^x + Bxe^x - Ax^2e^x - Bxe^x = xe^x,$$

da cui

$$(6A + 3B)e^x + 6Axe^x = xe^x.$$

Deve allora necessariamente risultare

$$6A + 3B = 0 \quad e \quad 6A = 1$$

cioè

$$A = \frac{1}{6} \quad e \quad B = -\frac{1}{3}.$$

Una soluzione particolare è quindi

$$y(x) = (\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x)e^x.$$

In conclusione, le soluzioni sono

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + (\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x)e^x.$$

IV appello - 25 Settembre 2001

1) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{t\log^4 t}.$$

2) Trovare i punti della curva

$$5x^2+6xy+5y^2=8$$

che sono più vicini all'origine e quelli che sono più lontani.

3) Si calcoli l'integrale

$$\int\int_D x^2 dxdy$$

dove

$$D=\{(x,y)\in I\!R^2 : 1\le x^2+y^2\le 2\}.$$

Svolgimento

1) Studiamo l'integrabilità di

$$\frac{1}{t\log^4 t}$$

in $[2,+\infty[$. Effettuando la sostituzione $\log t = y$, risulta $\dfrac{dt}{t}=dy$ e dunque

$$\int_2^x \frac{dt}{t\log^4 t}=\int_{\log 2}^{\log x} y^{-4}dy = -\frac{1}{3}\left(\log^{-3}(x)-\log^{-3}(2)\right).$$

Risulta allora

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_2^x\frac{dt}{t\log^4 t}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{3x}\cdot\left(\log^{-3}(x)-\log^{-3}(2)\right)=0.$$

2) Si tratta di un problema di massimo e minimo vincolato; infatti la funzione da analizzare è la funzione distanza dal punto $(0,0)$ cioè $\sqrt{x^2+y^2}$. Il vincolo è rappresentato dai punti della curva

$$5x^2+6xy+5y^2=8.$$

Più semplicemente possiamo studiare la funzione x^2+y^2 perché assume i massimi e minimi negli stessi punti.

La Lagrangiana risulta

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(5x^2+6xy+5y^2-8).$$

Inoltre si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=2x+10\lambda x+6\lambda y=0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y+6\lambda x+10\lambda y=0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=5x^2+6xy+5y^2-8=0. \end{cases}$$

Si ottiene allora

$$\begin{cases} \lambda=\frac{-2x}{10x+6y} \\ \\ 2y-\frac{12x^2}{10x+6y}-\frac{20xy}{10x+6y}=0 \\ \\ 5x^2+6xy+5y^2-8=0 \end{cases}$$

da cui, considerando la seconda equazione,

$$\frac{20xy+12y^2-12x^2-20xy}{10x+6y}=\frac{12(y^2-x^2)}{10x+6y}=0$$

cioè

$$y^2=x^2 \Leftrightarrow y=x \text{ oppure } y=-x.$$

Sostituendo nella terza equazione si ha, considerando $x = y$,

$$10x^2 + 6x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 16x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi i punti sono

$$(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Mentre se si considera $y = -x$ si ha

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

e quindi i punti sono

$$(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Poiché il vincolo è un insieme compatto, i massimi e minimi si devono trovare grazie al teorema di Weierstrass.

E' sufficiente allora valutare la funzione nei punti critici che abbiamo trovato; si ha che

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$$

e quindi $(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$ risultano punti di minimo, mentre da

$$f(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4$$

si ha che $(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ risultano punti di massimo.

3) Consideriamo la formula di Green

$$\int\int_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{+FrD} f dy,$$

dove, nel nostro caso,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2.$$

Si ha allora

$$f = \frac{x^3}{3}$$

e quindi

$$\int\int_D x^2 dxdy = \int_{+FrD} \frac{x^3}{3} dy.$$

La frontiera di D è data dalla circonferenza γ_1 con centro in $(0,0)$ e raggio 1 orientata in senso orario e dalla circonferenza γ_2 con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$ orientata in senso antiorario. Le equazioni parametriche sono date da

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

e

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t, \end{cases}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{+FrD} \frac{x^3}{3} dy &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}(\sqrt{2}\cos t)^3 \sqrt{2}\cos t dt - \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\cos^3 t \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

V appello - 11 Dicembre 2001

1) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx.$$

2) Determinare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}.$$

3) Stabilire se la seguente forma differenziale lineare risulta esatta e in caso affermativo determinare le primitive

$$\omega = (e^{-x^2} x + y)dx + (x + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt[3]{y}+3}\ \frac{1}{y})dy.$$

SOLUZIONI

1) La funzione risulta pari e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx = 2\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2 e^{-t} dt.$$

Calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^2 e^{-t} dt &= \int_0^x t^2 (-e^{-t})' dt \\
&= [-t^2 e^{-t}]_0^x - \int_0^x 2t(-e^{-t}) dt \\
&= -x^2 e^{-x} + \int_0^x 2te^{-t} dt \\
&= -x^2 e^{-x} + 2\int_0^x t(-e^{-t})' dt \\
&= -x^2 e^{-x} + 2[-te^{-t}]_0^x - 2\int_0^x -e^{-t} dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int_0^x e^{-t}dt \\
&= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2[-e^{-t}]_0^x \\
&= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2[-e^{-x} + 1] \\
&= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2 - 2e^{-x}.
\end{aligned}
$$

In conclusione

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|}dx &= 2\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2e^{-t}dt \\
&= 2\lim_{x\to+\infty} -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = 4.
\end{aligned}
$$

2) Poniamo

$$a_n = \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}};$$

applicando il criterio del rapporto alla serie assoluta si ha

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\ \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3|x|.$$

Allora la serie converge per

$$3|x| < 1$$

e non converge per

$$3|x| > 1.$$

Il raggio di convergenza risulta allora

$$R = \frac{1}{3}.$$

La serie dunque sicuramente converge in $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Studiamo il comportamento agli estremi.

Se $x = -\frac{1}{3}$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n(-\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

che diverge perché si confronta con la serie armonica $(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > \dfrac{1}{n}$ per $n > 1)$.

Se $x = \frac{1}{3}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n(\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

che converge per Leibnitz.

3) Il dominio di ω è $y > 0$ che risulta un insieme convesso. Quindi se la forma differenziale risulta chiusa allora è anche esatta.

Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 1 \ , \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 1,$$

quindi ω è chiusa dunque anche esatta.

Determiniamo una primitiva di F.

Si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X = e^{-x^2}x + y$$

da cui integrando

$$F = \int (e^{-x^2}x + y)dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + xy + g(y).$$

Risulta anche

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Y$$

cioè

$$x + g'(y) = x + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt[3]{y} + 3}\ \frac{1}{y}$$

da cui

$$g'(y) = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt[3]{y}+3}\ \frac{1}{y}.$$

Integrando ancora si ottiene

$$g(y) = \int \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt[3]{y}+3}\ \frac{1}{y}dy.$$

Risolviamo l'integrale; poniamo $y = t^6$ da cui $dy = 6t^5dt$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt[3]{y}+3}\ \frac{1}{y}dy &= \int \frac{t^3}{2t^2+3}\ \frac{6t^5}{t^6}dt = \int \frac{6t^2}{2t^2+3}dt \\
&= 3\int \frac{2t^2}{2t^2+3}dt = 3\int (1 - \frac{3}{2t^2+3})dt \\
&= 3t - 3\int \frac{1}{2\frac{t^2}{3}+1}dt = 3t - 3\int \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}})^2+1}dt \\
&= 3t - 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t) + C \\
&= 3y^{\frac{1}{6}} - 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y^{\frac{1}{6}}) + C.
\end{aligned}$$

Le primitive sono allora

$$F = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + xy + 3y^{\frac{1}{6}} - 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y^{\frac{1}{6}}) + C.$$

VI appello - 11 Gennaio 2002

1 Determinare il raggio di convergenza e la somma della serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{(k-1)!}.$$

2 Determinare una funzione derivabile $f : I\!R \to I\!R$ tale che

$$f(x)f'(x) = 5x,$$

per ogni $x \in I\!R$ e soddisfacente la condizione $f(0) = 1$.

3 Determinare il valore di λ per cui risulta esatta la forma differenziale

$$\omega = (y^2 + g(y))dx + (2xy + \frac{x}{1+y^2} + e^{\lambda x})dy$$

dove $g \in C^1(I\!R)$.

Trovare infine la funzione g e le primitive di ω.

Svolgimento

1 Determiniamo il raggio di convergenza con il criterio del rapporto

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^{2(k+1)-1}}{k!} \frac{(k-1)!}{|x|^{2k-1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^2}{k} = 0.$$

Poiché il limite risulta minore di 1 per ogni $x \in I\!R$, la serie converge per ogni $x \in I\!R$.

Calcoliamo la somma. Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{(k-1)!} &= \frac{x}{x}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{(k-1)!} = x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-2}}{(k-1)!} = \\ &= x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^{k-1}}{(k-1)!} = x\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{k}}{k!} = xe^{x^2}. \end{aligned}$$

2 Si ha

$$f(x)f'(x) = 5x \Leftrightarrow f(x)\frac{df(x)}{dx} = 5x \Leftrightarrow f(x)df(x) = 5xdx,$$

da cui integrando

$$\frac{f^2(x)}{2} = 5\frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow f^2(x) = 5x^2 + 2C$$

e quindi

$$f(x) = \pm\sqrt{5x^2 + 2C}.$$

Poiché f deve assumere in $x = 0$ valore positivo consideriamo solo il segno positivo.

Infine, dovendo essere $f(0) = 1$, si ha

$$\sqrt{2C} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2},$$

quindi

$$f(x) = \sqrt{5x^2 + 1}.$$

3 La forma differenziale risulta definita in $I\!R^2$.

Quindi se risulta chiusa risulta automaticamente anche esatta. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 2y + g'(y), \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 2y + \frac{1}{1+y^2} + \lambda e^{\lambda x}.$$

Perciò la forma differenziale risulta chiusa se e solo se

$$2y + g'(y) = 2y + \frac{1}{1+y^2} + \lambda e^{\lambda x}$$

e quindi per i valori

$$\lambda = 0 \quad e \quad g'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Otteniamo allora che

$$g(y) = \arctan y + C.$$

Per quanto riguarda la famiglia di primitive si ottiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + g(y)$$

da cui

$$F = xy^2 + xg(y) + \phi(y).$$

Inoltre si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + xg'(y) + \phi'(y) = 2xy + \frac{x}{1+y^2} + 1 \Leftrightarrow \phi'(y) = 1$$

cioè

$$\phi(y) = y + K.$$

In definitiva la famiglia di primitive risulta

$$F(x,y) = xy^2 + x \arctan y + xC + y + K.$$

VII appello - 5 Aprile 2002

1 Studiare l'integrabilità in senso generalizzato di

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Inoltre sapendo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

calcolare

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

2 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' - y = \frac{1}{y}$$

soddisfacente la condizione $y(1) = 1$.

3 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{y \cos^3 x}{1 + \sin^2 x} dx$$

dove γ risulta la sinusoide che congiunge i punti $(0, 0)$ e $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Svolgimento

1 Studiamo l'integrabilità della funzione con il confronto asintotico

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} x^{2+\alpha} e^{-x^2} = 0$$

per ogni α e quindi anche per $\alpha > 1$. Cosí la funzione $x^2 e^{-x^2}$ risulta integrabile in senso generalizzato in $I\!R$. Calcoliamo l'integrale. Si ha

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int -2x e^{-x^2} x dx$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int (e^{-x^2})' x dx \\
&= -\frac{1}{2}[xe^{-x^2} - \int e^{-x^2} dx] \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-x^2} + \frac{1}{2}\int e^{-x^2} dx.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \lim_{M\to+\infty}\{[-\frac{1}{2}xe^{-x^2}]_{-M}^{M} + \frac{1}{2}\int_{-M}^{M} e^{-x^2} dx\} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Essendo l'integrale di una funzione pari, l'integrale richiesto risulta pari a $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}$.

2 L'equazione risulta essere di Bernoulli infatti si ha

$$y' = y + y^{-1}.$$

Dividendo per y^{-1} si ottiene

$$yy' = y^2 + 1$$

e ponendo $y^2 = z$ si ha $z' = 2yy'$ e quindi

$$z' = 2z + 2$$

che risulta un'equazione lineare. Le soluzioni sono date da

$$z(x) = e^{2x}[\int 2e^{-2x} dx + C] = e^{2x}[-e^{-2x} + C] = Ce^{2x} - 1.$$

Dalla posizione fatta si ottiene

$$y^2 = Ce^{2x} - 1$$

da cui

$$y = \pm\sqrt{Ce^{2x} - 1}.$$

Essendo richieste nel problema di Cauchy soluzioni positive in $x = 1$, possiamo eliminare la radice negativa. Si ottiene

$$y(1) = 1 = \sqrt{Ce^2 - 1} \Leftrightarrow C = 2e^{-2}$$

quindi in definitiva

$$y = \sqrt{2e^{2(x-1)} - 1}.$$

3 La curva γ ha equazione parametrica

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, \sin t)$$

con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Quindi si ottiene

$$\int_\gamma \frac{y\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos^3 t}{1+\sin^2 t}dt.$$

Poniamo $\cos t = z$ da cui $dz = -\sin t dt$. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos^3 t}{1+\sin^2 t}dt &= -\int_1^0 \frac{z^3}{2-z^2}dz \\
&= \int_0^1 \frac{z^3}{2-z^2}dz \\
&= \int_0^1 -z + \frac{2z}{2-z^2}dz \\
&= [-\frac{z^2}{2} - \log(2-z^2)]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2} + \log 2.
\end{aligned}$$

I appello - 28 Giugno 2002

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{n!} \qquad x \in I\!R.$$

(Suggerimento: utilizzare la disuguaglianza $n! < n^n$).

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{x^2}{y} e^{xy} dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x}, \quad 2x^2 \leq y \leq 3x^2\}.$$

(Suggerimento: eseguire il cambiamento di variabili ponendo $xy = z$ e $\dfrac{x^2}{y} = t$).

Svolgimento

1) Distinguiamo i casi $|x| \leq 1$ e $|x| > 1$.

Per $|x| \leq 1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x^{n^2}}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{n^2}}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge (infatti applicando il criterio del rapporto si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} n! = \frac{1}{n+1}$$

che tende a zero al tendere di n a infinito) allora la serie data converge totalmente in $[-1,1]$, e quindi converge anche uniformemente e puntualmente.

Per $|x|>1$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n^2}}{n!}\geq\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n^2}}{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{|x|^n}{n}\right)^n=+\infty$$

e quindi la serie non converge puntualmente perché il termine generale non tende a zero.

2) Consideriamo l'omogenea associata

$$y''-y'-2y=0$$

che risulta un'equazione a coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica é

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda=-1,\quad\lambda=2.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea risulta allora

$$C_1e^{-x}+C_2e^{2x}.$$

Determiniamo un integrale particolare; visto che il termine noto é una costante cerchiamo come soluzioni particolari le costanti.

Sia $y=\lambda_0$ da cui $y'=0$ e $y''=0$ sostituendo si ha

$$-2\lambda_0=1\Leftrightarrow\lambda_0=-\frac{1}{2}.$$

L'integrale generale é allora

$$C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{2}.$$

Determiniamo infine le costanti. Si ha

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}$$

e

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}.$$

Utilizzando le condizioni

$$y'(0) = 1 = -C_1 + 2C_2$$

da cui

$$C_2 = \frac{1 + C_1}{2}$$

e sostituendo

$$y(0) = 0 = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = C_1 + \frac{1 + C_1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2C_1 + 1 + C_1 - 1}{2}$$

si ottiene

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

La soluzione risulta allora

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

3) Eseguiamo un cambiamento di variabili ponendo

$$\begin{cases} xy = z \\ \frac{x^2}{y} = t. \end{cases}$$

Ricaviamo z e t in funzione di x e y. Dalla seconda equazione si ottiene

$$x^2 = ty \Leftrightarrow \frac{x^2}{t} = y$$

che sostituito nella prima fornisce

$$x \frac{x^2}{t} = z \Leftrightarrow x^3 = tz \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{zt}$$

e infine

$$y = \frac{\sqrt[3]{z^2t^2}}{t} = z^{\frac{2}{3}}t^{-\frac{1}{3}}.$$

Ricapitolando si ha

$$\begin{cases} x = z^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}} \\ y = z^{\frac{2}{3}}t^{-\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Calcoliamo lo Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}z^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}z^{\frac{2}{3}}t^{-\frac{4}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9}t^{-1} - \frac{2}{9}t^{-1} = -\frac{1}{3}t^{-1}.$$

Trasformiamo il dominio D.

La relazione

$$\frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x}$$

si trasforma in

$$\frac{1}{2} \leq xy \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq z \leq 1$$

mentre

$$2x^2 \leq y \leq 3x^2$$

diventa

$$\frac{1}{2x^2} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{3x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{x^2}{y} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq t \geq \frac{1}{3}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int\int_D \frac{x^2}{y}e^{xy}dxdy &= \int\int_{D_1} te^z\frac{1}{3}\frac{1}{t}dtdz \\ &= \frac{1}{3}\int\int_{D_1} e^z dtdz \\ &= \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} dt \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^z dz \\ &= \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(e - e^{\frac{1}{2}}) = \frac{(e-\sqrt{e})}{18}. \end{aligned}$$

II appello - 11 Luglio 2002

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}},$$

con $x \in]-1, 1[$.

Stabilire se vale il passaggio al limite sotto il segno di derivata.

2) Stabilire per quali valori di $p, q, r, s \in I\!R$, la forma differenziale lineare:

$$\omega = \frac{px + qy}{x^2 + y^2} dx + \frac{rx + sy}{x^2 + y^2} dy,$$

risulta esatta in $I\!R^2 - \{(0, 0)\}$.

3) Si calcoli la lunghezza della curva intersezione delle superfici

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad 3z = 2xy$$

che congiunge i punti $(0, 0, 0)$ e $(2, 4, \frac{16}{3})$.

Svolgimento

1) Per quanto riguarda la convergenza puntuale si ha che per ogni $x \in]-1, 1[$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = 0,$$

e quindi la funzione limite risulta $f = 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme; si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]-1,1[} \left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - 0\right| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]-1,1[} \left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

e quindi la convergenza risulta anche uniforme.

Relativamente al passaggio al limite sotto il segno di derivata otteniamo

$$f_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} n \cos nx = \sqrt{n} \cos nx$$

per ogni $x \in]-1,1[$. Possiamo allora concludere che il passaggio non vale; infatti, ad esempio,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(0) = +\infty$$

mentre

$$f'(0) = 0.$$

2) Studiamo la chiusura.Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{q(x^2+y^2)-(px+qy)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{qx^2+qy^2-2pxy-2qy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{qx^2-qy^2-2pxy}{(x^2+y^2)^2}$$

mentre

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{r(x^2+y^2)-(rx+sy)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{rx^2+ry^2-2rx^2-2sxy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-rx^2+ry^2-2sxy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Affinché

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

deve risultare

$$qx^2-qy^2-2pxy = -rx^2+ry^2-2sxy$$

cioé

$$q = -r \ \text{ e } \ p = s.$$

Quindi la forma differenziale

$$\omega = \frac{sx-ry}{x^2+y^2}dx + \frac{rx+sy}{x^2+y^2}dy$$

risulta chiusa.

Per ottenere l'esattezza é sufficiente (conseguenza delle formule di Green) imporre che per una curva chiusa γ che circonda l'origine,

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Ad esempio, considerando la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} [-(s\cos t - r\sin t)\sin t + (r\cos t + s\sin t)\cos t]dt \\
&= \int_0^{2\pi} [-s\cos t\sin t + r\sin^2 t + r\cos^2 t + s\sin t\cos t]dt \\
&= \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.
\end{aligned}$$

Quindi

$$2\pi r = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

3) La curva si puó parametrizzare nel modo seguente

$$\begin{cases} x(t) = t \\ \\ y(t) = t^2, \qquad t \in [0,2] \\ \\ z(t) = \frac{2}{3}t^3. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^2 \sqrt{1+4t^2+4t^4}dt = \int_0^2 \sqrt{(1+2t^2)^2}dt \\
&= \int_0^2 (1+2t^2)dt = [t + \frac{2}{3}t^3]_0^2 = 2 + \frac{2}{3}8 = \frac{22}{3}.
\end{aligned}$$

III appello - 10 Settembre 2002

1) Studiare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2.$$

2) Stabilire per quali funzioni $U(x,y)$ la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + U(x,y)dy$$

risulta esatta.

3) Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ dove

$$\gamma(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ t^2), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

e

$$\omega = \sqrt{z}dx + xdy + ydz.$$

Svolgimento

1) Il dominio di f risulta $D = \mathbb{R}^2$. Inoltre f risulta di classe C^∞ e quindi i massimi e minimi sono da ricercare tra i punti che annullano il gradiente. Si noti che $f(x,y) = f(y,x)$, cioé f risulta simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$.

Si ha

$$\nabla f = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x-y) = 0. \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$4x^3 + 4y^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 = 0 \Leftrightarrow x = -y.$$

Sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$4x^3 - 4(x+x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-2) = 0$$

cioé

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

e quindi i punti sono

$$(0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Calcoliamo l'Hessiano

$$f''_{xx} = 12x^2 - 4, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 4, \quad f''_{yy} = 12y^2 - 4$$

da cui

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

$$H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 400 - 16 > 0.$$

Poiché $H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ e $f''_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ \ f''_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$, i punti $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sono di minimo locale. Per studiare il punto $(0,0)$ esaminiamo due restrizioni. Si ha $f(0,0) = 2$ e inoltre in $y = x$ si ha $f(x,x) = 2x^4 + 2 > 2$ mentre in $y = -x$ si ha $f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 + 2 = 2x^2(x^2-4) + 2 < 2$, per $-2 < x < 2$. Quindi $(0,0)$ risulta un punto sella.

2) Il dominio risulta $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Studiamo la chiusura

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

e quindi deve risultare

$$U(x,y) = \int \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}dx = \frac{y}{(x^2+y^2)} + g(y).$$

Allora la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + (\frac{y}{x^2+y^2} + g(y))dy$$

risulta chiusa.

Controlliamo l'esattezza. Poiché ω é chiusa in un dominio che non risulta semplicemente connesso, dalle formule di Green si ha che é sufficiente calcolare l'integrale curvilineo di ω su di una curva chiusa contenente l'origine: se l'integrale é nullo allora ω é esatta.

Consideriamo allora la curva $\gamma(t) = (\cos t,\ \sin t),\quad t \in [0, 2\pi]$. Si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} [-\cos t \sin t + (\sin t + g(\sin t)) \cos t] dt \\
&= \int_0^{2\pi} g(\sin t) \cos t dt \\
&= [G(\sin t)]_0^{2\pi} = G(0) - G(0) = 0
\end{aligned}$$

dove G é una primitiva di g. La forma differenziale é allora anche esatta.

3) Si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [t(1-\cos t) + (t - \sin t)\sin t + (1-\cos t)2t]dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3t - 3t\cos t + t\sin t - \sin^2 t)dt \\
&= [\frac{3t^2}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\
&= \frac{3\pi^2}{8} - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\sin t)' dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(-\cos t)' dt - [\frac{t - \sin t \cos t}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3\pi^2}{8} - 3\{[t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt\} + [-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\pi^2}{8} - \frac{3\pi}{2} + 3[-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{3\pi^2}{8} - \frac{3\pi}{2} + 4 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

IV appello - 25 Settembre 2002

1) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ la funzione definita per $(x, y) \neq (0, 0)$ da

$$f(x, y) = \frac{x^2|y|^\alpha}{x^4 + y^2}$$

ha limite finito per $(x, y) \to (0, 0)$.

(Suggerimento: separare i casi: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $0 < \alpha < 1$.)

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' + y \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

3) Calcolare l' integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{\cos x}{\sqrt{y}} dx$$

dove γ risulta la parte di sinusoide che congiunge i punti $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Svolgimento

1) Analizziamo il caso $\alpha > 1$. Si ottiene

$$f(x, y) = |y|^{\alpha-1} \frac{x^2|y|}{x^4 + y^2}.$$

Risulta

$$\frac{x^2|y|}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2};$$

infatti poiché

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

si ha

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{ab}{a^2 + b^2}$$

ed é sufficiente prendere $a = x^2$ e $b = |y|$. Quindi

$$|f(x,y)| \leq |y|^{\alpha-1}\frac{1}{2}$$

tende a zero per y che tende a zero.

Se invece $\alpha = 1$ si ottiene

$$\frac{x^2|y|}{x^4+y^2}$$

e calcolando i limiti prima lungo l'asse x poi sulla parabola di equazione $y = x^2$ si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1}{2};$$

quindi il limite non esiste.

Analogamente se $0 < \alpha < 1$ lungo le stesse restrizioni si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = +\infty.$$

la funzione f risulta dunque estendibile con continuitá se e solo se $\alpha > 1$.

2) Risulta un'equazione differenziale lineare. Si ha

$$y' = -y\cos x + \frac{\sin 2x}{2}.$$

Le soluzioni sono del tipo

$$y(x) \quad = \quad e^{\int -\cos x}[\int e^{\int \cos x}\frac{\sin 2x}{2}dx + C]$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\sin x}[\frac{1}{2}\int e^{\sin x}\sin 2x dx + C] \\
&= e^{-\sin x}[\frac{1}{2}\int e^{\sin x} 2\sin x\cos x dx + C] \\
&= e^{-\sin x}[\int e^{\sin x}\cos x\sin x dx + C] \\
&= e^{-\sin x}[\int e^{\sin x}\sin x d\sin x + C] \\
&= e^{-\sin x}[\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C] \\
&= \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}
\end{aligned}
$$

3) Una rappresentazione della curva risulta essere

$$
\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \sin t, \end{cases}
$$

con $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Si ha quindi

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\cos x}{\sqrt{y}} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} dt \\
&= [2\sqrt{\sin t}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2[\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}] \\
&= 2[1 - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}]
\end{aligned}
$$

V appello - 10 Dicembre 2002

1) Stabilire per quali valori del parametro reale p, esiste finito

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\, dx.$$

2) Sia f una funzione continua su $[3,5]$. Posto

$$F(x) = \int_3^x f(t)dt$$

esprimere la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x)y(x)$$

in termini di F.

3) Calcolare l' integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{e^{\sqrt{y}} \log(1+e^x)}{\sqrt{1+4x^2}} ds$$

dove γ é l'arco di parabola definito in $[0,1]$ da $y = x^2$.

Svolgimento

1) Osserviamo che posto $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^p}$, risulta $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$.

Per $p \leq 0$, f è continua e quindi integrabile in $[0,1]$.

Per $p = 1$, f si può estendere con continuità in $x = 0$ e quindi è integrabile in $[0,1]$.

Se $0 < p < 1$, f è infinitesima per $x \to 0^+$ in quanto $\sin x$ è un infinitesimo di ordine 1 rispetto ad x per $x \to 0^+$ e quindi f è integrabile in $[0,1]$ (si estende con continuità in $x = 0$).

Se invece $p > 1$, f è un infinito per $x \to 0^+$ e dunque bisogna determinare l'ordine di infinito.

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x^p}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{x^{p-\alpha-1}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{p-\alpha-1}}$$

che risulta uguale ad 1 se e solo se

$$p - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = p - 1.$$

Quindi se $0 < p - 1 < 1$ (la disuguaglianza di sinistra si deduce essendo $p > 1$) cioè se $1 < p < 2$ allora la f è integrabile in senso generalizzato in $[0, 1]$, mentre se $p - 1 \geq 1$, cioè se $p \geq 2$, essendo f di segno costante, risulta f non integrabile in senso generalizzato in $[0, 1]$. In conclusione risulta f integrabile in senso generalizzato in $[0, 1]$ se $p < 2$ mentre f non è integrabile in senso generalizzato in $[0, 1]$ se $p \geq 2$.

2) L'equazione differenziale é a variabili separabili. Si ha

$$y'(x) = f(x)y(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\frac{1}{y(x)} = f(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(x)} = f(x)dx.$$

Integrando si ottiene

$$\int \frac{dy}{y(x)} = \int f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \log|y(x)| = F(x) + K$$
$$\Leftrightarrow \quad |y(x)| = e^{F(x)+K} = Ce^{F(x)},$$

con $C \in I\!R^+$.

3) Una rappresentazione parametrica di $y = x^2, x \in [0,1]$, risulta essere

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases}$$

con $t \in [0,1]$.

Quindi $ds = \sqrt{1+4t^2}dt$ e così

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{e^{\sqrt{y}} \log(1+e^x)}{\sqrt{1+4x^2}} ds &= \int_0^1 \frac{e^t \log(1+e^t)}{\sqrt{1+4t^2}} \sqrt{1+4t^2} dt \\ &= \int_0^1 e^t \log(1+e^t) dt. \end{aligned}$$

Eseguiamo la sostituzione

$$1 + e^t = z \Leftrightarrow e^t = z - 1 \Leftrightarrow t = \log(z-1)$$

da cui

$$dt = \frac{1}{z-1} dz.$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned} & \int_0^1 e^t \log(1+e^t) dt = \int_2^{e+1} (z-1) \log z \cdot \frac{1}{z-1} dz = \int_2^{e+1} \log z dz \\ = & \int_2^{e+1} (z)' \log z dz = [z \log z]_2^{e+1} - \int_2^{e+1} dz \\ = & (e+1)\log(e+1) - 2\log 2 - [z]_2^{e+1} = (e+1)\log(e+1) - 2\log 2 - (e+1) + 2. \end{aligned}$$

VI appello - 2 Aprile 2003

1) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x(y^2 + xy - y)$$

in $[-1,1] \times [-1,1]$.

2) Studiare la convergenza puntuale e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx}$$

con $x \in I\!R^+$.

3) Risolvere il seguente problema ai limiti

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' = e^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = \pi. \end{cases}$$

Svolgimento

1) La funzione è continua su un insieme compatto e quindi per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti.

Inoltre f è di classe C^∞ e perció i punti di massimo e minimo sono da ricercare o tra i punti di frontiera oppure tra i punti interni dove si annulla il gradiente.

Iniziamo lo studio tra i punti interni. Si ha

$$\begin{cases} f'_x = y^2 + xy - y + xy = y^2 + 2xy - y = y(y + 2x - 1) \\ f'_y = x(2y + x - 1) = x^2 + 2xy - x = x(x + 2y - 1). \end{cases}$$

Determiniamo i punti dove si annulla il gradiente.

Se nella prima equazione $y = 0$ sostituendo nella seconda si ha $x(x-1) = 0$ da cui

$x = 0$ oppure $x = 1$.

Se invece nella prima equazione $y + 2x - 1 = 0$ sostituendo nella seconda si ottiene $x(x+2-4x-1) = 0$ da cui $x = 0$ oppure $x = \frac{1}{3}$ e risostituendo nella prima equazione si ha $y = 1$ o $y = \frac{1}{3}$. I punti critici interni sono allora

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (\frac{1}{3},\frac{1}{3}).$$

I punti $(1,0)$, $(0,1)$ si trovano sulla frontiera del quadrato e quindi non si possono accettare. Studiando il segno di

$$f(x,y) = xy(y + x - 1)$$

si ottiene che la funzione si annulla sugli assi e sulla retta $y = 1-x$; inoltre f è positiva nel secondo e quarto quadrante, negativa nel terzo e nel primo è negativa per $y < 1-x$ e positiva per $y > 1-x$. Quindi possiamo dedurre che i punti

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$$

sono punti sella.

Per studiare il punto $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ calcoliamo la matrice Hessiana. Si ha

$$f''_{xx} = 2y,\ f''_{yy} = 2x,\ f''_{xy} = f''_{yx} = 2y + 2x - 1$$

e quindi

$$H(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} > 0.$$

Quindi $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ risulta un punto di minimo relativo, essendo $f''_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} > 0$.

Studiamo infine la frontiera; parametrizzando i quattro segmenti che costituiscono il bordo otteniamo:

$$f(1,y) = y^2 \qquad -1 \leq y \leq 1$$

e si hanno i punti critici $(1,-1),\ (1,0),\ (1,1),$

$$f(x,1) = x^2 \qquad -1 \le x \le 1$$

e si hanno i punti critici $(1,1),\ (0,1),\ (-1,1),$

$$f(-1,y) = -y^2 + 2y \qquad -1 \le y \le 1$$

e si hanno i punti critici $(-1,-1),\ (-1,1),$

$$f(x,-1) = -x^2 + 2x \qquad -1 \le x \le 1$$

e si hanno i punti critici $(-1,-1),\ (1,-1)$. E' sufficiente allora confrontare i valori di f nei singoli punti

$$f(1,-1) = f(1,1) = f(-1,1) = 1,$$

$$f(-1,-1) = -3,$$

$$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27}.$$

In conclusione il massimo è 1 ed è assunto in $(1,-1),\ (1,1),\ (-1,1),$ mentre il minimo è -3 ed è assunto in $(-1,-1)$.

2) Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(e^{-x})^n,$$

e ponendo $e^{-x} = t$ si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nt^n$$

che risulta una serie di potenze con raggio di convergenza $R = 1$; infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Perciò la serie converge per

$$|t| < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < 1$$

e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Per quanto riguarda la somma, applicando un teorema di derivazione per serie, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} nt^n &= t\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} \\ &= t\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dt}t^n \\ &= t\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \\ &= t\frac{d}{dt}(\frac{1}{1-t} - 1) \\ &= \frac{t}{(1-t)^2}.\end{aligned}$$

Il teorema di derivazione per serie sussiste in quanto, per ogni fissato $t \in]-1,1[$ esiste $\rho > 0$ tale che $|t| < \rho < 1$; poiché in $[-\rho,\rho]$ c' è la convergenza totale e quindi uniforme per la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} t^n$, di conseguenza si ha la convergenza uniforme per ogni fissato $t \in]-1,1[$.

La somma risulta allora

$$S = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}.$$

3) L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti; consideriamo quindi l'omogenea associata

$$y''' - 2y'' + y' = 0.$$

L'equazione caratteristica risulta allora

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha = 0$$

le cui radici sono

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1$$

quest'ultima con molteplicità due.

L'integrale generale dell'omogenea associata risulta allora

$$C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

Troviamo ora una soluzione particolare del tipo

$$y = \lambda x^2 e^x.$$

Si ha

$$y' = 2\lambda x e^x + \lambda x^2 e^x,$$

$$y'' = 2\lambda e^x + 2\lambda x e^x + 2\lambda x e^x + \lambda x^2 e^x = 2\lambda e^x + 4\lambda x e^x + \lambda x^2 e^x$$

e infine

$$y''' = 2\lambda e^x + 4\lambda e^x + 4\lambda x e^x + 2\lambda x e^x + \lambda x^2 e^x.$$

Sostituendo ed uguagliando ad e^x, si ottiene

$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

L'integrale generale dell'equazione completa risulta allora

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x.$$

Determiniamo infine le costanti.

Le condizioni sono

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0;$$

inoltre calcolando $y'(x)$, risulta

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow C_2 + C_3 = 0.$$

Mettendo a sistema le due condizioni si trova

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \\ C_2 + C_3 = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ \\ C_3 = -C_2 = C_1. \end{cases}$$

Allora

$$y = C_1 - C_1 e^x + C_1 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x.$$

Infine

$$\lim_{x \to -\infty} C_1 - C_1 e^x + C_1 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x = C_1 = \pi,$$

e quindi la soluzione è

$$y = \pi(1 - e^x + x e^x) + \frac{x^2}{2} e^x.$$

I appello - 27 Giugno 2003

1) Stabilire se esiste finito l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{(3+\sin x - \cos x)\sqrt{x}}\, dx.$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = x^2 - \frac{y}{2e^x - 1}.$$

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x^2}{y^4} ds,$$

dove γ è la curva di rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 1 + t^2, \end{cases}$$

con $t \in [0, 1]$.

Svolgimento

1) Si tratta di studiare il comportamento della funzione in un intorno di $x = 0$ e in un intorno di $x = +\infty$. Studiamo, per iniziare, il punto $x = 0$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+1)}{(3+\sin x - \cos x)\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+1)\sqrt{x}}{x} = 0.$$

Quindi la funzione è limitata in un intorno di $x = 0$ e risulta estendibile con continuità.

Consideriamo ora il fatto che l'intervallo di integrazione è illimitato.

Osserviamo che $3 + \sin x - \cos x > 0$ per ogni $x \geq 0$, ed inoltre è limitata e quindi studiamo

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x}}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x}} = 0,$$

e inoltre

$$\frac{\log(x+1)}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

per x sufficientemente grande. Poichè la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non è integrabile, ad esempio in $[1, +\infty[$, dal teorema del confronto anche $\frac{\log(x+1)}{\sqrt{x}}$ non è integrabile. Quindi anche la funzione data non è integrabile.

2) Si tratta di una equazione differenziale lineare; infatti si ha

$$y' + \frac{y}{2e^x - 1} = x^2,$$

con $\alpha(x) = \dfrac{1}{2e^x - 1}$ e $\beta(x) = x^2$. Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{2e^x - 1}\, dx$$

con la sostituzione $e^x = t$.

Si ha

$$x = \log t, \quad dx = \frac{1}{t} dt$$

e quindi

$$\int \frac{1}{2e^x - 1} dx = \int \frac{1}{2t - 1} \frac{1}{t} dt.$$

Applicando Hermite risulta

$$\frac{1}{2t-1}\frac{1}{t} = \frac{A}{2t-1} + \frac{B}{t} = \frac{(A+2B)t - B}{(2t-1)t}$$

da cui

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ -B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1. \end{cases}$$

Perciò l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2t-1}\frac{1}{t}dt &= \int (\frac{2}{2t-1} - \frac{1}{t})dt \\
&= \log|2t-1| - \log|t| = \log|\frac{2t-1}{t}| \\
&= \log|2 - \frac{1}{t}| = \log|2 - \frac{1}{e^x}| = \log(2 - e^{-x}).
\end{aligned}$$

Le soluzioni sono allora date da

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\log(2-e^{-x})}(\int x^2 e^{\log(2-e^{-x})}dx + C) \\
&= \frac{1}{2-e^{-x}}\left(\int x^2(2-e^{-x})dx + C\right) = \frac{1}{2-e^{-x}}\left(\int (2x^2 - x^2e^{-x})dx + C\right) \\
&= \frac{1}{2-e^{-x}}\left(\frac{2}{3}x^3 - \int x^2e^{-x}dx + C\right).
\end{aligned}$$

Calcoliamo allora

$$\int x^2 e^{-x}dx.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\int x^2e^{-x}dx &= \int x^2(-e^{-x})'dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx \\
&= -x^2e^{-x} + 2\int x(-e^{-x})'dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx \\
&= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}.
\end{aligned}$$

Quindi sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2-e^{-x}}\left(\frac{2}{3}x^3 + x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + C\right) \\
&= \frac{1}{2-\frac{1}{e^x}}\left(\frac{2}{3}x^3 + x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + C\right) \\
&= \frac{e^x}{2e^x-1}\left(\frac{2}{3}x^3 + x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + C\right) \\
&= \frac{1}{2e^x-1}\left(\frac{2}{3}x^3e^x + x^2 + 2x + 2 + Ce^x\right).
\end{aligned}$$

3) Si ha

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt = \sqrt{4t^2 + 4t^2}\ dt = 2\sqrt{2}\ t\ dt.$$

Quindi l'integrale curvilineo diventa

$$\int_\gamma \frac{x^2}{y^4}\ ds = \int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^2)^4} 2\sqrt{2}t\ dt = 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{t^5}{(1+t^2)^4}\ dt.$$

Eseguendo la sostituzione

$$1 + t^2 = z \Leftrightarrow t^4 = (z-1)^2 \Leftrightarrow dz = 2t\ dt,$$

si ha

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{t^5}{(1+t^2)^4}\ dt &= 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{t\ t^4}{(1+t^2)^4}\ dt = \sqrt{2}\int_1^2 \frac{(z-1)^2}{z^4}\ dz = \\ &= \sqrt{2}\int_1^2 \frac{z^2 - 2z + 1}{z^4}\ dz = \sqrt{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{z^2} - 2\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right)\ dz = \\ &= \sqrt{2}\left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3z^3}\right]_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{24}. \end{aligned}$$

II appello - 11 Luglio 2003

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{2x - \sqrt{x-y}},$$

determinare il dominio D di f, i punti di massimo e minimo relativo in D° e i massimi e minimi assoluti in D.

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$xy' - y - x^2\sqrt{y} = 0$$

con la condizione $y(1) = 1$.

3) Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_S e^{x+y}\ xydS$$

dove S è la superficie $2x + y + z = 2$ contenuta nel primo ottante.

Svolgimento

1) Per il dominio si ha

$$x - y \geq 0 \text{ e } 2x - \sqrt{x-y} \geq 0.$$

Risulta quindi $x \geq y$ e dalla seconda condizione, si deduce che $x \geq 0$ ed elevando al quadrato si ottiene $4x^2 \geq x - y$. Quindi si ha

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ : x \geq y \text{ e } x \geq 0 \text{ e } y \geq x - 4x^2\}.$$

Ovviamente in D la funzione è continua perché composizione di funzioni continue. Inoltre $f(x,y) \geq 0$. Calcoliamo il gradiente. Si ha

$$\begin{cases} f'_x = \frac{1}{2\sqrt{2x-\sqrt{x-y}}}(2 - \frac{1}{2\sqrt{x-y}}) \\ \\ f'_y = \frac{1}{4\sqrt{x-y}\sqrt{2x-\sqrt{x-y}}}. \end{cases}$$

Poiché $f'_y \neq 0$, non ci sono punti che annullano il gradiente in D°. Inoltre f è derivabile in D°, quindi non ci sono punti di massimo o minimo relativo in D°. Per quanto riguarda i massimi e minimi assoluti in D si ha che nei punti

$$2x - \sqrt{x-y} = 0 \Leftrightarrow y = x - 4x^2$$

la funzione risulta risulta nulla e poiché $f(x,y) \geq 0$ questi sono punti di minimo assoluto.

Non ci sono punti di massimo assoluto infatti per $y = 0$ si ha

$$f(x,0) = \sqrt{2x - \sqrt{x}}$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty.$$

2) L'equazione si scrive, per $x \neq 0$ nella forma

$$y' = \frac{y}{x} + x\sqrt{y}.$$

Pertanto è un'equazione di Bernoulli con

$$\alpha(x) = \frac{1}{x}, \quad \beta(x) = x, \text{ e } s = \frac{1}{2}.$$

Esiste allora un aperto A contenente il punto $(1,1)$ in cui

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + x\sqrt{y}$$

risulta continua e Lipschitziana rispetto a y e quindi esiste un'unica soluzione.

Determiniamo la soluzione eseguendo la sostituzione $z = y^{1-s} = \sqrt{y}$.

Possiamo limitarci a considerare $x > 0$.

Da

$$z = \sqrt{y} \Longrightarrow z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y'$$

si ottiene

$$y^{-\frac{1}{2}} y' = \frac{\sqrt{y}}{x} + x \Longleftrightarrow \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y' = \frac{\sqrt{y}}{2x} + \frac{x}{2} \Longleftrightarrow z' = \frac{z}{2x} + \frac{x}{2}$$

che risulta un'equazione lineare. Dalla formula risolutiva si ha

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\frac{1}{2}\log x}[\int \frac{x}{2} e^{-\frac{1}{2}\log x} dx + C] = \sqrt{x}[\int \frac{x}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx + C] \\ &= \sqrt{x}[\int \frac{\sqrt{x}}{2} dx + C] = \sqrt{x}[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + C] = \frac{x^2}{3} + C\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Dalla condizione $z = \sqrt{y}$ si ha

$$y = z^2 = (\frac{x^2}{3} + C\sqrt{x})^2.$$

Imponendo la condizione $y(1) = 1$ otteniamo

$$1 = (C + \frac{1}{3})^2 \Longleftrightarrow C = \frac{2}{3} \text{ o } C = -\frac{4}{3}.$$

La seconda soluzione non si può accettare perché in tal caso si avrebbe $z(1) < 0$, che è impossibile visto che $z(x) = \sqrt{y(x)} > 0$.

Pertanto l'unica soluzione risulta (per $C = \frac{2}{3}$),

$$y = (\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{x})^2.$$

3) La superficie risulta

$$z = 2 - 2x - y$$

e una parametrizzazione è data da

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2 - 2u - v, \end{cases}$$

con $(u, v) \in D$ e dove

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2 - 2u\}.$$

Essendo una superficie in forma ordinaria si ha

$$dS = \sqrt{1 + z_u'^2 + z_v'^2} dudv = \sqrt{6} dudv.$$

Applicando la definizione di integrale superficiale si ha

$$\int_S e^{x+y}\ xydS = \int \int_D e^{u+v}\ uv\sqrt{6} dudv.$$

Utilizzando un teorema di riduzione otteniamo

$$\int \int_D e^{u+v}\ uv\sqrt{6} dudv = \sqrt{6} \int_0^1 ue^u du \int_0^{2-2u} e^v v dv.$$

Calcoliamo

$$\int_0^{2-2u} e^v v dv.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{2-2u} e^v v dv &= [ve^v]_0^{2-2u} - \int_0^{2-2u} e^v dv \\ &= (2 - 2u)e^{2-2u} - (e^{2-2u} - 1) = e^{2-2u} - 2ue^{2-2u} + 1. \end{aligned}$$

Quindi, sostituendo, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_S e^{x+y}\ xydS &= \sqrt{6} \int_0^1 ue^u(e^{2-2u} - 2ue^{2-2u} + 1)du \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 (ue^{2-u} - 2u^2e^{2-u} + ue^u)du \\ &= \sqrt{6}e^2 \int_0^1 ue^{-u} du - 2\sqrt{6}e^2 \int_0^1 u^2e^{-u} du + \sqrt{6} \int_0^1 ue^u du. \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente gli integrali. Si ha

$$\int_0^1 ue^{-u}du = \int_0^1 u(-e^{-u})'du = [-ue^{-u}]_0^1 + \int_0^1 e^{-u}du = -2e^{-1}+1,$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^2e^{-u}du &= \int_0^1 u^2(-e^{-u})'du = [-u^2e^{-u}]_0^1 + \int_0^1 2ue^{-u}du \\ &= -e^{-1} + 2\int_0^1 u(-e^{-u})'du = -e^{-1} + 2[-ue^{-u}]_0^1 + 2\int_0^1 e^{-u}du \\ &= -5e^{-1}+2\end{aligned}$$

e infine

$$\int_0^1 ue^u du = 1.$$

Sostituendo si ha

$$\int_S e^{x+y}\, xydS = \sqrt{6}e^2(-2e^{-1}+1) - 2\sqrt{6}e^2(-5e^{-1}+2) + \sqrt{6} = \sqrt{6}(-3e^2+8e+1).$$

III appello - 15 Settembre 2003

1) Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = xy^2e^{2x},$$

determinare i punti di massimo e minimo relativo e dire se ammette massimo assoluto.

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = \cos x$$

con le condizioni $y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{10},\ y''(0) = \dfrac{3}{5}.$

3) Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_S \frac{x^2}{x^2+y^2}dS$$

dove S è la superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = u+v, \end{cases}$$

definita sul triangolo T di vertici $(1,1),\ (0,0),\ (1,-1)$.

Svolgimento

1) Il dominio risulta essere l'intero piano $\mathbb{R}^2$ e la funzione è di classe C^∞. Gli eventuali punti di massimo e minimo si trovano tra le soluzioni che annullano il gradiente. Si ha

$$\begin{cases} f'_x = y^2e^{2x} + xy^2 2e^{2x} = 0 \\ \\ f'_y = 2xye^{2x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2e^{2x}(1+2x) = 0 \\ \\ 2xye^{2x} = 0. \end{cases}$$

Risulta la soluzione $y = 0$. Per determinare se sono punti di massimo o minimo relativo studiamo il segno della funzione.

La funzione si annulla sugli assi ed assume segno positivo nel primo e quarto quadrante, segno negativo nel secondo e terzo quadrante.

Dunque $(0, 0)$ è un punto sella mentre i punti $(x, 0)$ con $x > 0$ sono minimi relativi e i punti $(x, 0)$ con $x < 0$ sono massimi relativi.

Considerando la restrizione $y = 1$, ad esempio, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x, 1) = +\infty$$

e quindi non ci sono massimi assoluti.

2) È un'equazione differenziale di ordine 3 lineare a coefficienti costanti. Consideriamo allora l'omogenea associata e la relativa equazione caratteristica, si ha

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 2 = 0.$$

Risulta

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 1) = 0$$

e quindi le soluzioni sono

$$\alpha = 2, \ \alpha = \pm i.$$

L'integrale generale dell'omogenea associata risulta allora

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x.$$

Calcoliamo ora una soluzione particolare considerando una funzione del tipo

$$y = x(A \cos x + B \sin x).$$

Si ottiene

$$\begin{aligned}
y' &= A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)\\
y'' &= -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)\\
y''' &= -2A\cos x - 2B\sin x - A\cos x - B\sin x + x(A\sin x - B\cos x).
\end{aligned}$$

Sostituendo e svolgendo i conti si ha

$$-2B\sin x + 4A\sin x - 2A\cos x - 4B\cos x = \cos x$$

e ancora

$$(4A - 2B)\sin x + (-2A - 4B)\cos x = \cos x$$

e le soluzioni sono date da

$$A = -\frac{1}{10},\ B = -\frac{1}{5}.$$

Una soluzione particolare è allora

$$y = -\frac{1}{10}x\cos x - \frac{1}{5}x\sin x$$

e la soluzione dell'equazione completa risulta

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2\sin x + C_3\cos x - \frac{x}{10}\cos x - \frac{x}{5}\sin x.$$

Determiniamo le costanti utilizzando le condizioni iniziali. Si ha, derivando due volte

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 2C_1e^{2x} + C_2\cos x - C_3\sin x - \frac{1}{10}\cos x + \frac{x}{10}\sin x - \frac{1}{5}\sin x - \frac{x}{5}\cos x\\
y''(x) &= 4C_1e^{2x} - C_2\sin x - C_3\cos x + \frac{1}{10}\sin x + \frac{1}{10}\sin x +\\
&\quad + \frac{x}{10}\cos x - \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{5}\cos x + \frac{x}{5}\sin x
\end{aligned}$$

da cui calcolando in $x = 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_3 = 0; \\ y'(0) &= 2C_1 + C_2 - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}; \\ y''(0) &= 4C_1 - C_3 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema ottenuto si ricava

$$C_1 = \frac{1}{5},\ C_2 = -\frac{1}{5},\ C_3 = -\frac{1}{5}.$$

3) Dalla definizione di integrale superficiale si ottiene

$$dS = \sqrt{1 + z_u'^2 + z_v'^2}dudv = \sqrt{3}dudv$$

e inoltre

$$\int_S \frac{x^2}{x^2+y^2} dS = \int\int_T \frac{u^2}{u^2+v^2}\sqrt{3}dudv.$$

Passando alle coordinate polari, si ha che l'insieme T viene trasformato nel nuovo insieme T' dato da

$$T' = \{(t, \varrho) : -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \varrho \leq \frac{1}{\cos t}\}$$

e l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\int\int_T \frac{u^2}{u^2+v^2} dudv &= \sqrt{3}\int\int_{T'} \frac{\varrho^2 \cos^2 t}{\varrho^2} \varrho d\varrho\ dt = \sqrt{3}\int\int_{T'} \varrho \cos^2 t d\varrho\ dt \\ &= \sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^{\frac{1}{\cos t}} \varrho \cos^2 t d\varrho = \sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t [\frac{\varrho^2}{2}]_0^{\frac{1}{\cos t}} dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}. \end{aligned}$$

IV appello - 25 Settembre 2003

1) Studiare i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = x(x^2+y^2-1).$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2y\tan x + \sqrt{y} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{dx}{\sin x \cos y},$$

dove la curva γ è il tratto della bisettrice del I e III quadrante congiungente i punti $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ e $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

Svolgimento

1) La funzione é di classe C^∞ nel dominio $D = \mathbb{R}^2$ e quindi i punti di massimo o minimo relativo si trovano tra le soluzioni del sistema del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2+y^2-1+2x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+y^2-1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 0. \end{cases}$$

Il sistema risulta quindi

$$\begin{cases} 3x^2+y^2-1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$(0,1), (0,-1), (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0).$$

Poichè si ha

$$f(0,1) = f(0,-1) = 0$$

dallo studio del segno della funzione si deduce che sono punti sella. Infatti $f(x,y) > 0$ per $x^2 + y^2 \geq 1$ e $x \in \mathbb{R}^+$, mentre $f(x,y) < 0$ per $x^2 + y^2 \geq 1$ e $x \in \mathbb{R}^-$, invece all'interno della circonferenza di centro l'origine e raggio 1 $(x^2+y^2 \leq 1)$ la situazione si inverte. Infine nei punti dell'asse y e della circonferenza suddetta, risulta $f(x,y) = 0$. (Lo studente puó tracciare un grafico che illustri la situazione.)

Osserviamo inoltre che $f(x,y) = -f(-x,y)$ e $f(x,y) = f(x,-y)$.

Per quanto riguarda i rimanenti punti otteniamo

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

e quindi

$$f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Studiamo ora l'Hessiano. Si ha

$$f''_{xx} = 6x, \ f''_{yy} = 2x, \ f''_{xy} = f''_{yx} = 2y$$

e calcolando l'Hessiano si ottiene

$$H(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = H(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = \frac{12}{3} = 4 > 0.$$

Poichè $f''_{xx}(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$ allora $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ risulta un punto di minimo relativo, mentre $f''_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$ e quindi il punto $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ risulta un punto di massimo relativo. (Si puó dedurre piú semplicemente da $f(x,y) = -f(-x,y)$).

2) Si tratta di un'equazione di Bernoulli. Osserviamo che dalla condizione iniziale la funzione

$y(x) = 0$ non é una soluzione. Dividendo l'equazione per $\sqrt{y}$ si ottiene

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}\tan x + 1.$$

Sostituendo

$$z(x) = \sqrt{y},$$

si ha

$$z'(x) = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

e quindi l'equazione diventa

$$z' = z\tan x + \frac{1}{2}$$

che risulta un'equazione differenziale lineare. Applicando la formula risolutiva si ottiene

$$z(x) = e^{-\log(\cos x)}\left(\int \frac{1}{2}e^{\log(\cos x)}dx + C\right) = \frac{1}{\cos x}\left(\int \frac{1}{2}\cos x dx + C\right)$$

e quindi

$$z(x) = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2}\sin x + C\right) = \frac{1}{2}\tan x + \frac{C}{\cos x}.$$

Sostituendo infine si ha

$$y(x) = z^2 = \left(\frac{1}{2}\tan x + \frac{C}{\cos x}\right)^2$$

e dalla condizione iniziale si ottiene

$$y(0) = 1 = C.$$

3) Una parametrizzazione della curva è data da

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}$$

con $t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. Dalla definizione di integrale curvilineo si ha

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{dx}{\sin x \cos y} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t \cos t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos t} dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t}{\sin t \cos t} dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 t}{\sin t \cos t} dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t} dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin t} dt = [-\log(\cos t)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + [\log(\sin t)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\log \cos \frac{\pi}{3} + \log \cos \frac{\pi}{6} + \log \sin \frac{\pi}{3} - \log \sin \frac{\pi}{6} \\
&= -\log \frac{1}{2} + \log \frac{\sqrt{3}}{2} + \log \frac{\sqrt{3}}{2} - \log \frac{1}{2} = \log 3.
\end{aligned}
$$

V appello - 10 Dicembre 2003

1) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 - 4x + \arctan(4y + y^2),$$

determinare il massimo e il minimo assoluti nel triangolo T di vertici $(0,0)$, $(0,-4)$ e $(4,0)$.

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{y}.$$

3) Determinare la lunghezza dell'arco di parabola $y = x^2$ di estremi $(0,0)$, $(1,1)$.

Svolgimento

1) La funzione risulta di classe C^1 nel triangolo T. Calcoliamo il gradiente. Si ha

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x - 4 \\ \\ f'_y(x,y) = \frac{1}{1+(4y+y^2)^2}(4+2y). \end{cases}$$

L'unico punto soluzione del sistema del gradiente uguagliato a zero risulta $(2,-2)$ che non é interno a T. Quindi il massimo ed il minimo assoluti sono da ricercare sulla frontiera di T.

Analizziamo allora i tre segmenti che costituiscono il perimetro del triangolo.

Iniziamo con i punti del tipo $(x,0)$ con $0 \le x \le 4$.

Si ha $f(x,0) = x^2 - 4x = f_1(x)$ e studiandone la derivata otteniamo

$$f_1'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Inoltre

$$f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

e quindi $x = 0,\ x = 4$ sono punti di massimo mentre $x = 2$ risulta punto di minimo con $f_1(0) = f_1(4) = 0$ e $f_1(2) = -4$.

Consideriamo ora i punti del tipo $(0, y)$ con $-4 \leq y \leq 0$.

Si ha $f(0, y) = \arctan(4y + y^2) = f_2(y)$ e studiandone la derivata otteniamo

$$f_2'(y) = \frac{1}{1 + (4y + y^2)^2}(4 + 2y) = 0 \Leftrightarrow y = -2.$$

Inoltre

$$f_2'(y) > 0 \Leftrightarrow y > -2$$

e quindi $x = 0,\ x = -4$ sono punti di massimo mentre $x = -2$ risulta punto di minimo con $f_2(0) = f_2(-4) = 0$ e $f_2(-2) = \arctan(-4)$.

Infine analizziamo i punti dell'ipotenusa del triangolo cioé i punti del tipo $(x, x-4)$ con $0 \leq x \leq 4$.

Risulta $f(x, x - 4) = x^2 - 4x + \arctan(x^2 - 4x) = f_3(x)$ e studiandone la derivata si ha

$$f_3'(x) = 2x - 4 + \frac{1}{1 + (x^2 - 4x)^2}(2x - 4) = (2x - 4)(1 + \frac{1}{1 + (x^2 - 4x)^2}) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Inoltre

$$f_3'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

e quindi $x = 0,\ x = 4$ sono punti di massimo mentre $x = 2$ risulta punto di minimo con $f_3(0) = f_3(4) = 0$ e $f_3(2) = -4 + \arctan(-4) < -4$. In conclusione si ha che il massimo della funzione vale 0 mentre il minimo vale $-4 + \arctan(-4)$.

2) L'equazione, essendo della forma

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y}{x} - y^{-1}$$

é un'equazione di Bernoulli con

$$\alpha(x) = \frac{1}{x}, \quad \beta(x) = -1, \quad s = -1.$$

Dividendo per y^{-1} si ha

$$yy' = \frac{1}{x}y^2 - 1.$$

Determiniamo la soluzione eseguendo la sostituzione $z = y^2$.

Risulta $z' = 2yy'$ e quindi si ha

$$2yy' = \frac{2}{x}y^2 - 2, \text{ cioé } z' = \frac{2z}{x} - 2$$

che risulta un'equazione lineare. Dalla formula risolutiva si ha

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{2\log|x|}[\int -2e^{-2\log|x|}dx + C] \\ &= x^2[\int -\frac{2}{x^2}dx + C] \\ &= x^2[\frac{2}{x} + C] = 2x + Cx^2. \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono:

$$y(x) = \pm\sqrt{2x + Cx^2}.$$

3) Una parametrizzazione della curva é data da

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2, \end{cases}$$

con $t \in [0,1]$. Essendo una curva regolare si ha

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt = \int_0^1 \sqrt{1+(2t)^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+z^2}dz,$$

avendo eseguito la sostituzione $2t = z$. Calcoliamo quindi

$$\int_0^2 \sqrt{1+z^2}dz.$$

Ponendo $\sqrt{1+z^2} = z + t$, si ha

$$\sqrt{1+z^2} = z+t \Leftrightarrow 1+z^2 = z^2+t^2+2zt \Leftrightarrow 1-t^2 = 2zt \Leftrightarrow z = \frac{1-t^2}{2t}$$

e inoltre

$$dz = \frac{-2t2t-(1-t^2)2}{4t^2}dt = -\frac{t^2+1}{2t^2}dt.$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+z^2}dz &= -\int (\frac{1-t^2}{2t}+t)\frac{t^2+1}{2t^2}dt = -\int \frac{t^2+1}{2t}\frac{t^2+1}{2t^2}dt \\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{(t^2+1)^2}{t^3}dt = -\frac{1}{4}\int \frac{t^4+1+2t^2}{t^3}dt \\
&= -\frac{1}{4}\int (t+\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t})dt = -\frac{1}{4}[\frac{t^2}{2}-\frac{t^{-2}}{2}+2\log|t|] = -\frac{t^2}{8}+\frac{t^{-2}}{8}-\frac{1}{2}\log|t| \\
&= -\frac{(\sqrt{1+z^2}-z)^2}{8}+\frac{(\sqrt{1+z^2}-z)^{-2}}{8}-\frac{1}{2}\log|\sqrt{1+z^2}-z|.
\end{aligned}$$

Quindi sostituendo e facendo i conti, otteniamo

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\left[-\frac{(\sqrt{1+z^2}-z)^2}{8}+\frac{(\sqrt{1+z^2}-z)^{-2}}{8}-\frac{1}{2}\log|\sqrt{1+z^2}-z|\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\log(\sqrt{5}-2).
\end{aligned}$$

VI appello - 8 Aprile 2004

1) Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x+4)^n}{(n^2+1)4^n}.$$

Discutere infine la convergenza uniforme.

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' + 2y = \cos\sqrt{2}x$$

con le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

3) Risolvere il seguente integrale triplo

$$\iiint_D x dx dy dz$$

dove D è la parte dello spazio compresa tra $x + y + z = 1$ e $x + y + z = 3$ nel primo ottante.

Svolgimento

1) Si tratta di una serie di potenze infatti

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x+4)^n}{(n^2+1)4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(x+2)^n}{(n^2+1)4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n^2+1)2^n}.$$

Il termine a_n risulta dato da

$$a_n = \frac{1}{2^n(n^2+1)}.$$

Applicando Cauchy-Hadamard si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{(n^2+1)}} = \frac{1}{2},$$

quindi il raggio risulta $R = 2$.

Sicuramente la serie converge per $x \in]-2-2, -2+2[\; = \;]-4, 0[$. Controllando anche gli estremi dell'intervallo, si ha

$$x = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(n^2+1)4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)}$$

che converge e infine

$$x = -4 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(n^2+1)4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)}$$

che converge per Leibnitz. In conclusione la serie converge nell'intervallo $[-4, 0]$ e per il Teorema di Abel la convergenza é uniforme.

2) L'equazione differenziale é un'equazione lineare a coefficienti costanti. Consideriamo allora l'equazione caratteristica

$$\alpha^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{2}i.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata é allora

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x.$$

Determiniamo ora un'integrale particolare.

Poiché $\sqrt{2}i$ é una soluzione dell'equazione omogenea associata con molteplicitá 1, una soluzione particolare risulta della forma

$$y(x) = x(A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x).$$

Derivando si ottiene

$$y'(x) = A\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}Ax\sin\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x + \sqrt{2}Bx\cos\sqrt{2}x$$

e

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\sqrt{2}A\sin\sqrt{2}x - \sqrt{2}A\sin\sqrt{2}x - \sqrt{2}\sqrt{2}Ax\cos\sqrt{2}x \\ &+ \sqrt{2}B\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}B\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}\sqrt{2}Bx\sin\sqrt{2}x. \end{aligned}$$

Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} &-2\sqrt{2}A\sin\sqrt{2}x - 2Ax\cos\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}B\cos\sqrt{2}x - 2Bx\sin\sqrt{2}x \\ + &\ 2Ax\cos\sqrt{2}x + 2Bx\sin\sqrt{2}x = \cos\sqrt{2}x \end{aligned}$$

da cui

$$-2\sqrt{2}A\sin\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}B\cos\sqrt{2}x = \cos\sqrt{2}x$$

e quindi le soluzioni sono

$$A = 0,\ B = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale completa risulta essere

$$y(x) = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ x\sin\sqrt{2}x.$$

Poiché $y(0) = 0$ si ha

$$y(0) = 0 = C_1$$

quindi

$$y(x) = C_2 \sin \sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ x \sin \sqrt{2}x.$$

Inoltre

$$y'(x) = \sqrt{2}C_2 \cos \sqrt{2}\ x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x + \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{2}}\ x \cos \sqrt{2}x$$

da cui

$$y'(0) = 1 = \sqrt{2}C_2.$$

Quindi la soluzione cercata é

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ x \sin \sqrt{2}x.$$

3) L'insieme D, nel primo ottante, risulta essere la differenza tra i due tetraedri sottesi rispettivamente dai piani $x + y + z = 3$ e $x + y + z = 1$. Indicandoli con D' e D'' si ha

$$\iiint_D xdxdydz = \iiint_{D'} xdxdydz - \iiint_{D''} xdxdydz.$$

Calcoliamo per iniziare

$$\iiint_{D'} xdxdydz.$$

Si ha

$$D' = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3 - x,\ 0 \leq z \leq 3 - x - y\}$$

e quindi l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
&\iiint_{D'} x dx dy dz = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{3-x-y} x dz \\
= &\int_0^3 x dx \int_0^{3-x} (3-x-y) dy = \int_0^3 [3xy - x^2 y - x\frac{y^2}{2}]_0^{3-x} dx \\
= &\int_0^3 3x(3-x) - x^2(3-x) - \frac{x}{2}(3-x)^2 dx \\
= &\int_0^3 [9x - 3x^2 - 3x^2 + x^3 - \frac{x}{2}(9 + x^2 - 6x)] dx \\
= &\int_0^3 (9x - 6x^2 + x^3 - \frac{9}{2}x - \frac{x^3}{2} + 3x^2) dx \\
= &\int_0^3 (\frac{9}{2}x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3) dx \\
= &[\frac{9}{2}\frac{x^2}{2} - 3\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}]_0^3 = \frac{27}{8}.
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
&\iiint_{D''} x dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\
= &\int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \int_0^1 x[y - xy - \frac{y^2}{2}]_0^{1-x} dx \\
= &\int_0^1 x(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}) dx \\
= &\int_0^1 [x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x}{2}(1 + x^2 - 2x)] dx \\
= &\int_0^1 (\frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}) dx = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Quindi il valore dell'integrale doppio risulta essere

$$\frac{27}{8} - \frac{1}{24} = \frac{10}{3}.$$

I appello - 24 Marzo 2004

1) Studiare la continuità in $\mathbb{R}^2$ e la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2 + x^2\sin(|xy|)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' + y' - 2y = xe^x$$

sotto le condizioni $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) Calcolare, utilizzando le formule di Green, l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2}\,dx - \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy$$

dove γ è la frontiera della parte di corona circolare compresa tra le circonferenze di raggio 1 e 2 e delimitata dal semiasse positivo delle x e dalla bisettrice del 1° e del 3° quadrante.

Svolgimento

1) La funzione è continua se $(x,y) \neq (0,0)$, in quanto composizione, somma e prodotto di funzioni continue.

In $(0,0)$, dobbiamo calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2 + x^2\sin(|xy|)}{x^2+y^2};$$

passando in coordinate polari il limite diventa

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta\sin(|\rho^2\cos\theta\sin\theta|)}{\rho^2}$$
$$=\lim_{\rho\to 0}(\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^2\theta\sin(|\rho^2\cos\theta\sin\theta|))=0$$

Vediamo se risulta uniforme rispetto a θ. Poichè

$$|\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^2\theta\sin(|\rho^2\cos\theta\sin\theta|)|\le\rho^2+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|\le 2\rho^2,$$

la funzione è continua in $(0,0)$, essendo $f(0,0)=0$.

Studiamo ora la derivabilità in $(0,0)$. Risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0,$$

dunque f è derivabile in $(0,0)$. Per quanto riguarda la differenziabilità, dobbiamo valutare

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\sqrt{x^2+y^2}\varepsilon(x,y),$$

con $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y)=0$, ovvero, ricavando $\varepsilon(x,y)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2+x^2\sin(|xy|)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Passando in coordinate polari abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta\sin(|\rho^2\cos\theta\sin\theta|)}{\rho^3}$$
$$=\lim_{\rho\to 0}\left(\rho\cos^2\theta\sin^2\theta+\rho\cos^2\theta\,\frac{\sin(|\rho^2\cos\theta\sin\theta|)}{\rho^2|\cos\theta\sin\theta|}|\cos\theta\sin\theta|\right)=0.$$

Inoltre tale limite è uniforme rispetto a θ, in quanto

$$\left|\rho\cos^2\theta\sin^2\theta+\rho\cos^2\theta\,\frac{\sin(|\rho^2\cos\theta\sin\theta|)}{\rho^2|\cos\theta\sin\theta|}|\cos\theta\sin\theta|\right|\le 2\rho.$$

Concludiamo dunque che f è differenziabile in $(0,0)$.

2) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Poiché l'equazione caratteristica è

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\bar{y}(x) = ae^{-2x} + be^x,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Studiamo ora l'equazione completa.

Il termine a secondo membro è del tipo

$$\beta(x) = P(x)e^{kx}$$

con $P(x) = x$, $k = 1$. Poiché $k = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità $\mu = 1$, possiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$y(x) = (Ax + B)xe^x = (Ax^2 + Bx)e^x,$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. Derivando si ottiene

$$y'(x) = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$$

$$y''(x) = Ax^2e^x + (4A + B)xe^x + (2A + 2B)e^x$$

e quindi, sostituendo nell'equazione di partenza, otteniamo

$$Ax^2e^x + (4A+B)xe^x + (2A+2B)e^x + (2Ax+B)e^x + (Ax^2+Bx)e^x - 2(Ax^2+Bx)e^x = xe^x,$$

cioè

$$(6Ax + 2A + 3B)e^x = xe^x.$$

Per il principio d'identità dei polinomi deve essere

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = -\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

e quindi una soluzione particolare è

$$y^*(x) = \Big(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\Big)e^x$$

e l'integrale generale è

$$y(x) = ae^{-2x} + be^x + \Big(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\Big)e^x.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, si ottiene

$$y(0) = a + b = 0$$

$$y'(0) = -2a + b - \frac{1}{9} = 0$$

da cui $a = -\frac{1}{27}$, $b = \frac{1}{27}$. Si conclude pertanto che la soluzione è

$$y(x) = -\frac{1}{27}e^{-2x} + \frac{1}{27}e^x + \Big(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\Big)e^x.$$

3) Risulta, dalle formule di Green,

$$I := \int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2}\,dx - \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy = \int\int_D \Big(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\Big)\,dx\,dy$$
$$= 6\int\int_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

dove D è la parte di piano racchiusa da γ, ovvero

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, \ \ 0 \leq y \leq x\}.$$

Passando in coordinate polari risulta

$$D = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq \rho \leq 2, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

e dunque, utilizzando un teorema di riduzione per gli integrali doppi,

$$\begin{aligned} I &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_1^2 \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^4} \rho \, d\rho \Big) \, d\theta \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \sin\theta \int_1^2 \frac{d\rho}{\rho} = 3 [\sin^2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} [\log\rho]_1^2 = \frac{3}{2} \log 2. \end{aligned}$$

II appello - 8 Aprile 2004

1) Stabilire se esiste

$$\int_0^1 \frac{(\arctan x)^{-\frac{2}{3}}}{x+1}\,dx.$$

2) Si determinino i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = (x^2 - x^3)(1-y)$$

nel quadrato $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

3) Calcolare

$$\iiint_D \frac{z}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$$

dove D è la parte del cilindro di equazione $x^2+y^2 \le 2$ compresa tra il piano $z = -\sqrt{2}$ e la superficie $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$.

Svolgimento

1) Si tratta di un integrale generalizzato in quanto la funzione $f(x) := \dfrac{(\arctan x)^{-\frac{2}{3}}}{x+1}$ è illimitata in prossimità di 0; risulta infatti

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(\arctan x)^{\frac{2}{3}}(x+1)} = +\infty.$$

Confrontiamo la funzione con $\dfrac{1}{x^\alpha}$; si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\arctan x)^{-\frac{2}{3}}}{x+1} \frac{1}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{x^{\alpha-\frac{2}{3}}}{x+1} = K \geq 0$$

se e solo se $\alpha - \dfrac{2}{3} \geq 0$: in tal caso f è un infinito di ordine inferiore o uguale a $\dfrac{1}{x^\alpha}$, per $x\to 0^+$. Poiché la funzione $\dfrac{1}{x^\alpha}$ è G-integrabile se $0 < \alpha < 1$, dal teorema del confronto asintotico concludiamo che anche f è G-integrabile (è sufficiente considerare $\dfrac{2}{3} \leq \alpha < 1$).

2) Essendo f una funzione continua definita in un insieme compatto, dal teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti.

Cerchiamo dapprima eventuali punti critici in Q°. Risulta

$$\begin{cases} f'_x = (2x - 3x^2)(1-y) = 0, \\ f'_y = -(x^2 - x^3) = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(2-3x)(1-y) = 0, \\ x^2(x-1) = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene $x = 0$, $y \in [0,1]$ oppure $x = 1$ e $y = 1$. Concludiamo dunque che non ci sono punti estremali in Q°.

Osserviamo inoltre che si può scrivere f come

$$f(x,y) = x^2(1-x)(1-y) \geq 0$$

per ogni $(x,y) \in Q$. Essendo $f(0,y) = f(1,y) = 0$ per ogni $y \in [0,1]$ e $f(x,1) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$, i punti del tipo $(0,y)$, $(1,y)$, $(x,1)$, $x,y \in [0,1]$ sono punti di minimo assoluto.

Il massimo assoluto è da ricercare tra i punti del tipo $(x,0)$, $x \in [0,1]$. Si ha

$$f(x,0) = x^2(1-x) := g(x).$$

Poiché $g'(x) = 2x - 3x^2 = x(2-3x) \geq 0$ se e solo se $x \leq \frac{2}{3}$, g è non decrescente in $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ e non crescente in $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$; pertanto il punto $\frac{2}{3}$ è di massimo assoluto per g. Concludiamo dunque che $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ è di massimo assoluto per f e $f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \frac{4}{27}$.

3) Risulta

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2, \ -\sqrt{2} \leq z \leq 2\sqrt{x^2+y^2}\}$$

da cui, passando in coordinate cilindriche,

$$D = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \ -\sqrt{2} \leq z \leq 2\rho, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Utilizzando un teorema di riduzione per integrali tripli, si ha quindi

$$\iiint_D \frac{z}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{-\sqrt{2}}^{2\rho} \frac{z}{1+\rho^2}\ \rho\,dz$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho}{1+\rho^2}\ \left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\sqrt{2}}^{2\rho}\ d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho}{1+\rho^2}(2\rho^2-1)\,d\rho$$
$$= 2\pi\Big\{2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^3}{1+\rho^2}\,d\rho - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho\Big\}$$
$$= 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^3+\rho-\rho}{1+\rho^2}\,d\rho - \pi[\log(1+\rho^2)]_0^{\sqrt{2}}$$
$$= 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho\,d\rho - 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2\rho}{1+\rho^2}\,d\rho - \pi\log 3$$
$$= 2\pi\ [\rho^2\ ]_0^{\sqrt{2}} - 2\pi[\log(1+\rho^2)]_0^{\sqrt{2}} - \pi\log 3 = 4\pi - 3\pi\log 3$$
$$= \pi(4-3\log 3).$$

III appello - 19 Luglio 2004

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2y' = xy + 2\sqrt{y}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

2) *a*) Determinare una funzione $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tale che la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = [x^2y + yf(x)]\, dx + [y + xf(x)]\, dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2$.

b) In corrispondenza alla f trovata al punto *a*) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, con $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_S \frac{4x^2 - z}{\sqrt{1 + 2x^2 + 2y^2}}\, ds$$

dove S è la parte del paraboloide di equazione $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(x^2 + y^2)$ contenuta nel primo ottante e delimitata dai piani $z = 0$ e $z = \sqrt{2}$.

Svolgimento

1) Possiamo riscrivere, per $x \neq 0$, l'equazione nella forma

$$y' = \frac{1}{x}y + \frac{2}{x^2}\sqrt{y},$$

che è un'equazione di Bernoulli con $a(x) = \dfrac{1}{x}$, $b(x) = \dfrac{2}{x^2}$ e $s = \dfrac{1}{2}$. Per semplicità ci limitiamo a considerare $x > 0$.

Con la sostituzione $z = \sqrt{y}$, da cui $z' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\ y'$, si ottiene

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\ y' = \frac{1}{2x}\ \sqrt{y} + \frac{1}{x^2},$$

ovvero

$$z' = \frac{1}{2x}\ z + \frac{1}{x^2}$$

che è un'equazione lineare. Utilizzando la formula risolutiva risulta

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\frac{1}{2}\log x}\left(\int e^{-\frac{1}{2}\log x}\ \frac{1}{x^2}\,dx + C\right) = \sqrt{x}\left(\int \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx + C\right) \\ &= \sqrt{x}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + C\right) = C\sqrt{x} - \frac{2}{3x}. \end{aligned}$$

Pertanto si conclude che

$$y(x) = z^2(x) = \left(C\sqrt{x} - \frac{2}{3x}\right)^2.$$

Ora, imponendo la condizione $y(1) = 0$, ovvero $\left(C - \dfrac{2}{3}\right)^2 = 0$, si ricava che $C = \dfrac{2}{3}$.

In conclusione la soluzione è

$$y(x) = \frac{4}{9}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^2.$$

2) *a*) Poiché $\mathbb{R}^2$ è convesso, la chiusura di ω è sufficiente per l'esattezza. Dato che risulta

$$\frac{\partial X}{\partial y} = x^2 + f(x)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = xf'(x) + f(x)$$

per avere la chiusura dobbiamo porre

$$x^2 + f(x) = xf'(x) + f(x)$$

cioè $f'(x) = x$. Quindi ad esempio la funzione $f(x) = \frac{x^2}{2}$ soddisfa le condizioni richieste.

b) Poiché la forma $\omega(x,y) = \frac{3}{2}x^2y\,dx + \left(y + \frac{x^3}{2}\right)dy$ è esatta in $\mathbb{R}^2$, detto F un potenziale di ω, l'integrale curvilineo su γ, che è una curva semplice e regolare, è dato da

$$\int_\gamma \omega = F\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - F(\gamma(0)).$$

Cerchiamo dunque un potenziale di ω. Deve essere

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{3}{2}x^2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y + \frac{x^3}{2}$$

da cui $F(x,y) = \frac{3}{2}\int x^2y\,dx + \varphi(y) = \frac{1}{2}x^3y + \varphi(y)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}\,x^3 + \varphi'(y) = \frac{x^3}{2} + y \Leftrightarrow \varphi'(y) = y \Leftrightarrow \varphi(y) = \frac{1}{2}\,y^2 + c.$$

Quindi concludiamo che, ad esempio, la funzione

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\,x^3y + \frac{1}{2}\,y^2$$

è un potenziale di ω. Pertanto risulta

$$\int_\gamma \omega = F(0,1) - F(1,0) = \frac{1}{2}.$$

3) Osserviamo innanzitutto che S è una superficie regolare e che f è continua, quindi l'integrale esiste. Una parametrizzazione della superficie è data da

$$\begin{cases} x(\rho,\theta) & = \rho\cos\theta \\ y(\rho,\theta) & = \rho\sin\theta \\ z(\rho,\theta) & = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\rho^2 \end{cases}$$

dove $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ e $0 < \rho \le \sqrt{2}$. Poiché

$$\begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \sqrt{2}\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix},$$

risulta $L = -\sqrt{2}\rho^2\cos\theta$, $M = \sqrt{2}\rho^2\sin\theta$, $N = \rho$, da cui $\sqrt{L^2+M^2+N^2} = \sqrt{2\rho^4+\rho^2} = \rho\sqrt{2\rho^2+1}$.

Pertanto l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{4x^2 - z}{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}\,ds &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\rho^2\cos^2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2}{\sqrt{1+2\rho^2}}\rho\sqrt{1+2\rho^2}\,d\theta\,d\rho \\ &= \int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\theta = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\pi, \end{aligned}$$

tenendo conto del fatto che $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}$.

IV appello - 21 Settembre 2004

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) = nx \sin\left(\frac{nx^2 - 1}{n^3 + 1}\right), \quad x \in [0, +\infty), \; n > 1.$$

Verificare se vale il passaggio al limite sotto il segno di derivata.

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x+1}\, y' = x + 1, \\ y'(0) = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_A (2x - y)\, dx\, dy,$$

dove A è la parte del semipiano $x > 0$ delimitato, nel primo quadrante, dalla circonferenza di centro 0 e raggio 1, e nel quarto, dalla retta di equazione $y = 2x - 2$.

Svolgimento

1) Studiamo la convergenza puntuale. Poiché risulta

$$\lim_{n\to+\infty} nx\sin\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right)}{\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right)}\ \frac{nx^2-1}{n^3+1} = 0,$$

la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente alla funzione $f(x)\equiv 0$.

Studiamo la convergenza uniforme. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 0}\left|nx\sin\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right)\right|.$$

Essendo $\sup_{x\geq 0}\left|nx\sin\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right)\right| = +\infty$, si conclude che la convergenza non può essere uniforme.

Verifichiamo direttamente se vale il passaggio al limite sotto il segno di derivata: risulta

$$\frac{d}{dx}f_n(x) = n\sin\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right) + \frac{2n^2x^2}{n^3+1}\cos\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right)$$

e dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right)}{\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right)} + \frac{2n^2x^2}{n^3+1}\cos\left(\frac{nx^2-1}{n^3+1}\right)\right] = 0.$$

D'altra parte è anche $\frac{d}{dx}f(x) = 0$, pertanto vale il passaggio al limite sotto il segno di derivata.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

Ponendo $y' = z$ l'equazione diventa

$$z' - \frac{1}{x+1}\ z = x+1$$

che è un'equazione lineare del primo ordine. Applicando la formula per il calcolo dell'integrale generale si ha

$$z(x) = e^{\varphi(x)} \left[\int \beta(x) e^{-\varphi(x)}\, dx + C \right],$$

dove $\beta(x) = x + 1$ e $\varphi(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x+1} = \log(x+1)$. Pertanto

$$z(x) = e^{\log(x+1)} \left[\int (x+1) e^{-\log(x+1)}\, dx + C \right] = (x+1)(x+C) = x^2 + (C+1)x + C.$$

Imponendo la condizione $y'(0) = z(0) = 0$ si ha $C = 0$, e dunque

$$z(x) = x^2 + x.$$

Ora, $y(x) = \displaystyle\int z(x)\, dx = \int (x^2 + x)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + B$ e dalla condizione $y(0) = 0$ si ricava che $B = 0$. Concludiamo pertanto che

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}.$$

3) L'insieme A è costituito da due parti, cioè $A = A_1 \cup A_2$ dove

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\},$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 2x - 2 \le y \le 0\}.$$

Possiamo pertanto dividere l'integrale ed ottenere

$$\iint_A (2x - y)\, dx\, dy = \iint_{A_1} (2x-y)\, dx\, dy + \iint_{A_2} (2x-y)\, dx\, dy.$$

Consideriamo il primo integrale: risulta $A_1 = \left\{(\rho,\theta) :\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$, passando in coordinate polari, e dunque, per un teorema di riduzione,

$$\begin{aligned}
\iint_{A_1} (2x-y)\, dx\, dy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\rho\cos\theta - \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^1 \rho^2\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}[2\sin\theta + \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo integrale si ha

$$\begin{aligned}
\iint_{A_2} (2x-y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_{2x-2}^0 (2x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[2xy - \frac{y^2}{2}\right]_{2x-2}^0 dx \\
&= \int_0^1 \left[-2x(2x-2) + \frac{(2x-2)^2}{2}\right] dx \\
&= \int_0^1 (2-2x^2)\,dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Concludiamo dunque che

$$\iint_A (2x-y)\,dx\,dy = \frac{5}{3}.$$

V appello - 10 Dicembre 2004

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(nx)}{2^n(x+1)^n}, \quad x \in [1, +\infty)$$

e stabilire se, nell'insieme dove la serie converge puntualmente, converge pure totalmente.

2) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' - 4y = e^{2x} + \sin x.$$

3) Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = (f(y) + x) \cos x dx + \left(\frac{2}{y} \sin x + 2y\right) dy,$$

definita in $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0\}$,

$a)$ determinare una funzione $f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty))$ tale che ω sia esatta in R.

$b)$ In corrispondenza alla f trovata al punto $a)$ calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è l'ellisse di equazione $x^2 + 4(y-1)^2 = 1$.

Svolgimento

1) Studiamo la convergenza puntuale. Se $x \geq 1$, posto $a_n = \dfrac{\log(nx)}{2^n(x+1)^n}$, possiamo applicare il criterio del rapporto ed ottenere

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log((n+1)x)}{2^{n+1}(1+x)^{n+1}} \frac{2^n(1+x)^n}{\log(nx)} = \frac{\log((n+1)x)}{\log(nx)} \frac{1}{2(1+x)}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2(1+x)}.$$

Pertanto la serie converge, dal criterio del rapporto, se $\dfrac{1}{2(x+1)} < 1$, ovvero se $x > -\dfrac{1}{2}$. Concludiamo pertanto che la serie data converge puntualmente in $[1, +\infty)$.

Vediamo se la convergenza è totale. Si osserva che, essendo $\log y \leq y$, per ogni $y \geq 1$, si può maggiorare il termine generale nel seguente modo se $x \geq 1$:

$$a_n = \frac{\log(nx)}{2^n(x+1)^n} \leq \frac{nx}{2^n(x+1)^n} \leq \frac{n\ x^n}{2^n(x+1)^n} \leq \frac{n}{2^n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n := L_n,$$

poiché $\dfrac{x}{x+1} < 1$, se $x \geq 1$. D'altra parte L_n è il termine generale di una serie convergente (si verfica con il criterio del rapporto). Pertanto la serie data è totalmente convergente in $[1, +\infty)$. Di conseguenza, le serie converge anche uniformemente in $[1, +\infty)$.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti.

Risolviamo l'equazione omogenea associata

$$y'' - 4y = 0.$$

Poiché l'equazione caratteristica è

$$\alpha^2 - 4 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\bar{y}(x) = ae^{2x} + be^{-2x},$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Studiamo ora l'equazione completa. Per determinare un integrale particolare dell'equazione data consideriamo le due equazioni:

$$(1)\ y'' - 4y = e^{2x}$$

$$(2)\ y'' - 4y = \sin x$$

Risolviamo la (1).

Il termine a secondo membro è del tipo

$$\beta(x) = e^{kx}$$

con $k = 2$. Poiché $k = 2$ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità $\mu = 1$, possiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$y_1(x) = Axe^{2x},$$

con $A \in \mathbb{R}$, da cui, derivando, si ottiene

$$y_1'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$

$$y_1''(x) = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Sostituendo, la (1) diventa $(4A + 4Ax)e^{2x} - 4Axe^{2x} = e^{2x}$, cioè $4Ae^{2x} = e^{2x}$, da cui $A = \dfrac{1}{4}$.

Risolviamo ora la (2). Abbiamo a secondo membro un termine del tipo $\beta(x) = P(x)e^{px}\sin(qx)$, con $p + iq = i$ che non è soluzione dell'equazione caratteristica. Pertanto dobbiamo porre

$$y_2(x) = A\cos x + B\sin x,$$

con $A, B \in \mathbb{R}$, da cui

$$y_2'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$y_2''(x) = -A\cos x - B\sin x.$$

Sostituendo in (2) si ha:

$$-5A\cos x - 5B\sin x = \sin x$$

da cui $A = 0$ e $B = -\frac{1}{5}$, quindi $y_2(x) = -\frac{1}{5}\sin x$.

In conclusione un integrale particolare è

$$y^*(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{5}\sin x$$

e dunque l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = ae^{2x} + be^{-2x} + \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{5}\sin x,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

3) (a) Poiché R è convesso, per avere l'esattezza basta provare che ω è chiusa. Poiché si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial y} = f'(y)\cos x, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{2}{y}\cos x, \end{cases}$$

deve essere $f'(y)\cos x = \frac{2}{y}\cos x$, ovvero $f'(y) = \frac{2}{y}$, e quindi ad esempio la funzione $f(y) = 2\log y$ verifica le condizioni richieste.

(b) Poiché la forma

$$\omega(x,y) = (2\log y + x)\cos x\, dx + \left(\frac{2}{y}\ \sin x + 2y\right)\, dy$$

è esatta in R e la curva γ è regolare, con supporto contenuto in R e chiusa, per un noto teorema risulta

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

I appello - 24 Marzo 2005

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n + x^{2n}}, \quad x \geq 0,\ n \geq 1.$$

Verificare che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n + x^{2n}}\, dx = 0.$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (1+x^2)\ y' + xy = x + x^3, \\ y(0) = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$I = \iiint_E \frac{dx\, dy\, dz}{1 + x^2 + y^2 + z},$$

dove E è la regione di spazio delimitata dai due paraboloidi di equazione $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - (x^2 + y^2)$.

Svolgimento

1) Studiamo la convergenza puntuale. Se $0 \le x \le 1$ risulta $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n+x^{2n}} = 0$; inoltre, se $x > 1$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n+x^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}\left(\frac{n}{x^{2n}}+1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x^n\left(\frac{n}{x^{2n}}+1\right)} = 0.$$

Pertanto la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme. Dobbiamo valutare $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\ge 0} \frac{x^n}{n+x^{2n}}$ e quindi studiamo la derivata $f_n'(x)$. Poiché

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(n-x^{2n})}{(n+x^{2n})^2},$$

risulta $f_n'(x) = 0$ se e solo se $x^{2n} = n$, ovvero $x = e^{\frac{\log\sqrt{n}}{n}}$; quindi $f_n'(x) > 0$ se $0 < x < e^{\frac{\log\sqrt{n}}{n}}$ e $f_n'(x) < 0$ se $x > e^{\frac{\log\sqrt{n}}{n}}$. Pertanto il punto $x = e^{\frac{\log\sqrt{n}}{n}}$ è un punto di massimo locale.

Si ha allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\ge 0} \frac{x^n}{n+x^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0,$$

cioè si ha convergenza uniforme.

Dal momento che le $f_n(x)$ sono continue in $[0,1]$ e la successione $(f_n)_n$ è uniformemente convergente, per un noto teorema vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n+x^{2n}}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n+x^{2n}}\,dx = 0.$$

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea.

L'equazione si puó riscrivere come

$$y' + \frac{x}{1+x^2}\,y = x;$$

pertanto l'integrale generale è dato dalla formula

$$y(x) = e^{A(x)} \left(\int b(x) e^{-A(x)} \, dx + C \right),$$

dove $C \in \mathbb{R}$, $A(x) = \displaystyle\int \alpha(x)\, dx$, con $\alpha(x) = -\dfrac{x}{1+x^2}$ e $b(x) = x$. Cosí $A(x) = -\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = -\frac{1}{2}$ lo

e quindi

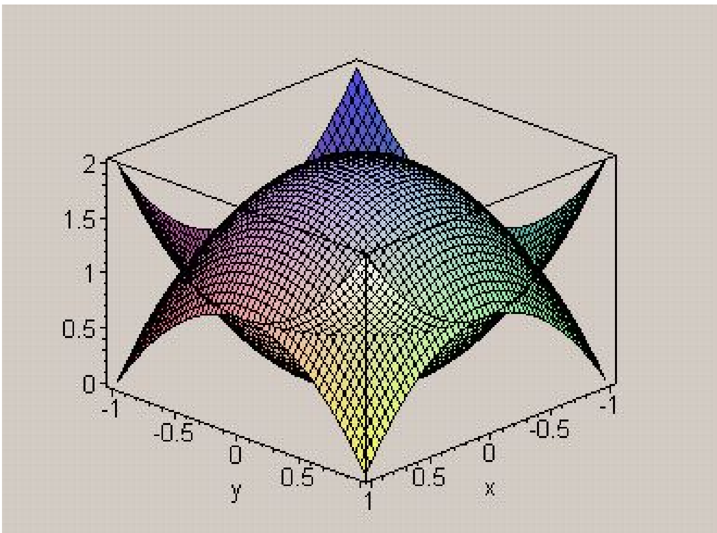
$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{1}{2}\log(x^2+1)} \left(\int x \; e^{\frac{1}{2}\log(1+x^2)} \, dx + C \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(\int x\sqrt{1+x^2}\, dx + C \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C \right) = \frac{1}{3}(1+x^2) + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}, \;\; C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene $y(0) = \dfrac{1}{3} + C = \dfrac{1}{3}$ se e solo se $C = 0$, e quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{3}(1+x^2).$$

3) L'insieme E si puó scrivere come

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2)\}.$$



Passando in coordinate cilindriche, E diventa

$$E = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq \rho \leq 1, \ \rho^2 \leq z \leq 2 - \rho^2\},$$

e dunque, applicando un teorema di riduzione,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \frac{\rho}{1+\rho^2+z}\, dz = 2\pi \int_0^1 \rho[\log(1+\rho^2+z)]_{\rho^2}^{2-\rho^2}\, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho[\log 3 - \log(1+2\rho^2)]\, d\rho = \pi \log 3 - 2\pi \int_0^1 \rho \log(1+2\rho^2)\, d\rho \\
&= \pi \log 3 - \pi[\rho^2 \log(1+2\rho^2)]_0^1 + \pi \int_0^1 \rho^2 \frac{4\rho}{1+2\rho^2}\, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho\, d\rho - 2\pi \int_0^1 \frac{\rho}{1+2\rho^2}\, d\rho = \pi - \frac{\pi}{2}[\log(1+2\rho^2)]_0^1 = \pi - \frac{\pi}{2} \log 3.
\end{aligned}$$

II appello - 5 Aprile 2005

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(1-\cos x)^2}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 5e^x \cos x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

3) Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = (y^3 + ye^{f(x)})dx + \left(3xy^2 + \frac{x^2}{2}\right) dy,$$

(a) determinare una funzione $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ tale che ω sia esatta in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0\}$;

(b) in corrispondenza alla f trovata al punto (a) calcolare il potenziale che, nel punto $(1,0)$, assume il valore 0;

(c) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è l'arco di iperbole $y = \dfrac{1}{x}$ che va dal punto $A = (1,1)$ al punto $B = \left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

Svolgimento

1) Studiamo la convergenza totale. Risulta

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| (-1)^n \frac{(1-\cos x)^2}{\sqrt{n}} \right| = \frac{4}{\sqrt{n}},$$

pertanto la convergenza non è totale, in quanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ è divergente.

Studiamo ora la convergenza uniforme. Poiché si tratta di una serie a segni alterni, dal criterio di Leibnitz si ha

$$|R_n(x)| \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{(1-\cos x)^2}{\sqrt{n+1}} \right| \leq \frac{4}{\sqrt{n+1}}$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

Concludiamo dunque che la serie converge uniformemente, e quindi anche puntualmente.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti.

Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è

$$\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\alpha = 2 \pm i$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora un integrale particolare dell'equazione iniziale. Il secondo membro è del tipo $\beta(x) = P(x)e^{px} \cos qx$, con $P(x) = 5$, $p = 1$ e $q = 1$. Poiché $p + iq = 1 + i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, basta cercare una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = Ae^x \cos x + Be^x \sin x.$$

Poiché

$$\bar{y}'(x) = Ae^x \cos x - Ae^x \sin x + Be^x \sin x + Be^x \cos x$$

e

$$\bar{y}''(x) = -2Ae^x \sin x + 2Be^x \cos x,$$

sostituendo nell'equazione iniziale si ottiene:

$$-2Ae^x \sin x + 2Be^x \cos x - 4Ae^x \cos x + 4Ae^x \sin x - 4Be^x \sin x - 4Be^x \cos x$$

$$+5Ae^x \cos x + 5Be^x \sin x = 5e^x \cos x.$$

Pertanto deve essere

$$\begin{cases} A - 2B = 5, \\ 2A + B = 0, \end{cases}$$

da cui $A = 1$ e $B = -2$.

Dunque l'integrale particolare sarà

$$\bar{y}(x) = e^x \cos x - 2e^x \sin x$$

e infine l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x + e^x \cos x - 2e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali risulta

$$y(0) = c_1 + 1 = 1 \;\Leftrightarrow\; c_1 = 0$$

e, essendo $y'(x) = 2c_1e^{2x}\cos x - c_1e^{2x}\sin x + 2c_2e^{2x}\sin x + c_2e^{2x}\cos x + e^x\cos x - e^x\sin x - 2e^x\sin x - 2e^x\cos x$,

$$y'(0) = 2c_1 + c_2 - 1 = c_2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; c_2 = 1,$$

quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = e^{2x}\sin x + e^x\cos x - 2e^x\sin x.$$

3) (a) Essendo D convesso, ω è esatta se e solo se è chiusa. Determiniamo pertanto f tale che ω sia chiusa: poiché

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial y} = 3y^2 + e^{f(x)}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 3y^2 + x, \end{cases}$$

è $\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$ se e solo se $f(x) = \log x$. Dunque la forma diventa

$$\omega(x,y) = (y^3 + xy)dx + \left(3xy^2 + \frac{x^2}{2}\right)dy.$$

(b) Per definizione, se F è un potenziale deve essere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y^3 + xy, \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3xy^2 + \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Integrando la prima espressione ricaviamo $F(x,y) = xy^3 + \frac{1}{2}x^2y + \varphi(y)$ da cui $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3xy^2 + \frac{1}{2}x^2 + \varphi'(y) = 3xy^2 + \frac{1}{2}x^2 \;\Leftrightarrow\; \varphi'(y) = 0$, ovvero $\varphi(y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Poiché deve essere $F(1,0) = 0$, concludiamo che $C = 0$, quindi il potenziale richiesto è

$$F(x,y) = xy^3 + \frac{1}{2}x^2y.$$

(c) Essendo ω esatta, per un noto teorema si ha

$$\int_\gamma \omega = F\left(2, \frac{1}{2}\right) - F(1,1) = -\frac{1}{4}.$$

III appello - 20 Luglio 2005

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{\log(nx)}{nx-1}, \quad x \geq 3.$$

Verificare che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_3^4 \frac{\log(nx)}{nx-1}\, dx = 0.$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (1+\cos^2 x)\; y' - \sin(2x)\; y = \sin x\; (1+\cos^2 x), \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

3) Calcolare l'area del dominio D contenuto nel 1° e nel 2° quadrante, delimitato dalla cardioide di equazione

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + \frac{1}{2}\cos(2t) \\ y(t) = \sin t + \frac{1}{2}\sin(2t) \end{cases}$$

con $t \in [0, \pi]$.

Svolgimento

1) Studiamo la convergenza puntuale. Risulta $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log(nx)}{nx-1} = 0$, dunque la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente alla funzione limite $f(x) = 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme. Bisogna calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 3} \left| \frac{\log(nx)}{nx-1} \right| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 3} \frac{\log(nx)}{nx-1}.$$

Per determinare l'estremo superiore di $\dfrac{\log(nx)}{nx-1}$ studiamo la derivata

$$f_n'(x) = \frac{nx - 1 - nx\ \log(nx)}{x(nx-1)^2}.$$

Poiché $f_n'(x) < 0$, per ogni $x \geq 3$, si ha che $f_n(x)$ è decrescente in $[3, +\infty[$, quindi $\sup_{x\geq 3} f_n(x) = f_n(3) = \dfrac{\log(3n)}{3n-1}$. Pertanto, essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 3} \frac{\log(nx)}{nx-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(3n)}{3n-1} = 0,$$

concludiamo che f è uniformemente convergente in $[3, +\infty[$.

Infine, dal momento che le $f_n(x)$ sono continue in $[3, 4]$ e che la successione $(f_n)_n$ è uniformemente convergente, per un noto teorema vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Pertanto concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_3^4 \frac{\log(nx)}{nx-1}\,dx = \int_3^4 \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(nx)}{nx-1}\,dx = 0.$$

2) Dividendo per $(1 + \cos^2 x)$ l'equazione diventa

$$y' - \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}\ y = \sin x,$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea.

Dalla formula che fornisce l'integrale generale si ha

$$y(x) = e^{\varphi(x)} \left(\int \beta(x) e^{-\varphi(x)}\, dx + C \right),$$

dove $C \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \displaystyle\int \alpha(x)\, dx$. Nel nostro caso si ha $\alpha(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$ e $\beta(x) = \sin x$, quindi $\varphi(x) = \displaystyle\int \frac{2\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}\, dx = -\log(1+\cos^2 x) + k$, $k \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log(1+\cos^2 x)} \left(\int \sin x \; e^{\log(1+\cos^2 x)}\, dx + C \right) \\ &= \frac{1}{1+\cos^2 x} \left(\int \sin x (1+\cos^2 x)\, dx + C \right) \\ &= \frac{1}{1+\cos^2 x} \left(\int \sin x\, dx + \int \sin x \cos^2 x\, dx + C \right) \\ &= \frac{1}{1+\cos^2 x} \left(-\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C \right). \end{aligned}$$

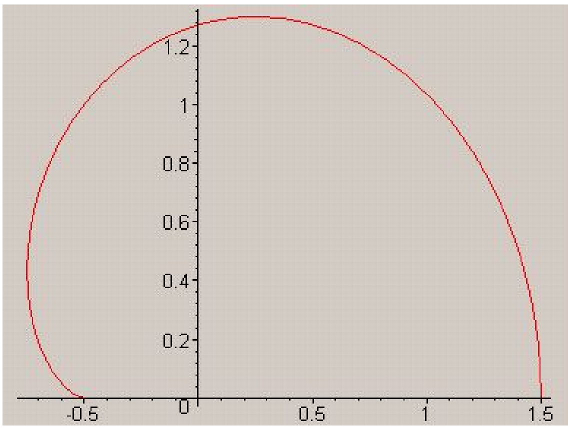
Imponendo la condizione iniziale si ottiene $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = C = 0$ e quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x}{1+\cos^2 x} = -\cos x \; \frac{1+\frac{1}{3}\cos^2 x}{1+\cos^2 x}.$$

3) Possiamo utilizzare la formula di Green

$$Area(D) = \frac{1}{2} \int_{+Fr(D)} (x\, dy - y\, dx).$$

La frontiera di D (vedi figura) risulta composta da un arco di cardioide e da un segmento dell'asse x.



Tenendo conto del fatto che il contributo sull'asse x è nullo, si ha

$$\begin{aligned}
Area(D) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left\{ \left[\cos t + \frac{1}{2}\cos(2t)\right][\cos t + \cos(2t)] \right. \\
&\quad \left. - \left[\sin t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right][-\sin t - \sin(2t)] \right\} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\cos^2 t + \frac{3}{2}\cos t\cos(2t) + \frac{1}{2}\cos^2(2t) + \sin^2 t + \frac{3}{2}\sin t\sin(2t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\sin^2(2t)\right] dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left\{ \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left[\cos t(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2\sin^2 t\cos t\right] \right\} dt \\
&= \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\int_0^\pi (\cos^3 t - \cos t\sin^2 t)\, dt \\
&= \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\int_0^\pi (\cos t\cos^2 t - \cos t\sin^2 t)\, dt \\
&= \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\int_0^\pi [(1 - \sin^2 t)\cos t - \cos t\sin^2 t]\, dt \\
&= \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\int_0^\pi [\cos t - 2\cos t\sin^2 t]\, dt \\
&= \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\int_0^\pi \cos t\, dt - \frac{3}{2}\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^\pi = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}[\sin t]_0^\pi = \frac{3}{4}\pi.
\end{aligned}$$

IV appello - 20 Settembre 2005

1) Stabilire se esiste il seguente integrale generalizzato:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 - e^{\sqrt{x-1}}}.$$

2) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y''' + 4y'' + 3y' = e^{-2x}$$

che verifica le condizioni

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

3) Calcolare la lunghezza dell'arco di epicicloide di equazioni

$$\gamma(t) = \begin{cases} 3\cos t - \cos(3t), \\ 3\sin t - \sin(3t), \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Svolgimento

1) Possiamo scrivere

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1-e^{\sqrt{x-1}}} = \int_1^2 \frac{dx}{1-e^{\sqrt{x-1}}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1-e^{\sqrt{x-1}}}.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, si tratta di un integrale in senso generalizzato in quanto la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{\sqrt{x-1}}}$ è illimitata in prossimità di 1. Infatti $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-e^{\sqrt{x-1}}} = -\infty$. Sfruttando il teorema del confronto asintotico, calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{(x-1)^\alpha}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^\alpha}{|1-e^{\sqrt{x-1}}|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{e^{\sqrt{x-1}}-1}(x-1)^{\alpha-\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1, \text{ se } \alpha = \frac{1}{2} \\ 0, \text{ se } \alpha > \frac{1}{2} \\ +\infty, \text{ se } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poiché f è un infinito di ordine $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$, $f(x)$ è G-integrabile in $[1,2]$.

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che $f(x)$ è Riemann-integrabile in ogni intervallo $[2,x]$, con $x > 2$, essendo continua. Applichiamo il teorema del confronto asintotico e calcoliamo, con $\alpha > 1$, il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{1-e^{\sqrt{x-1}}} = 0, \ \forall\ \alpha > 1.$$

Concludiamo dunque che $f(x)$ è G-integrabile anche in $[2,+\infty[$, essendo f un infinitesimo di ordine superiore a $\dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 1$, e pertanto esiste l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1-e^{\sqrt{x-1}}}$.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del terzo ordine non omogenea a coefficienti costanti.

Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è

$$\alpha^3 + 4\alpha^2 + 3\alpha = 0,$$

le cui soluzioni sono $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -3$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_H(x) = A + Be^{-x} + Ce^{-3x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione iniziale cerchiamo una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = ae^{-2x},$$

poiché -2 non è soluzione dell'equazione caratteristica.

Poiché $\bar{y}'(x) = -2ae^{-2x}$, $\bar{y}''(x) = 4ae^{-2x}$, $\bar{y}''(x) = -8ae^{-2x}$, sostituendo nell'equazione data si ottiene $2ae^{-2x} = e^{-2x}$, da cui $a = \frac{1}{2}$ e dunque $\bar{y}(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$. L'integrale generale è pertanto

$$y(x) = A + Be^{-x} + Ce^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo ora le condizioni iniziali si ha

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = A = 0, \\ y(0) = B + C + \frac{1}{2} = 0 \\ y'(0) = -B - 3C - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

e quindi la soluzione sarà

$$y(x) = -\frac{1}{4}(e^{-x} + e^{-3x}) + \frac{1}{2}e^{-2x}.$$

3) Utilizzando la formula $L_\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$ si ha

$$
\begin{aligned}
L_\gamma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\sin t + 3\sin(3t))^2 + (3\cos t - 3\cos(3t))^2}\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2 t + 9\sin^2(3t) - 18(\sin t \sin(3t) + \cos t\cos(3t)) + 9(\cos^2 t + \cos^2(3t))}\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{18 - 18(\sin t\sin(3t) + \cos t\cos(3t))}\, dt = \sqrt{18}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos(2t)}\, dt \\
&= \sqrt{18}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin^2 t}\, dt = \sqrt{36}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = \sqrt{36}[-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.
\end{aligned}
$$

V appello - 29 Settembre 2005

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = n^3 x e^{-n^2 x}, \quad x \geq 0.$$

Verificare che $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^3 x e^{-n^2 x}\, dx = 0$.

2) Determinare, per $x > 0$, la soluzione dell'equazione differenziale

$$xy'' - y' = \log x$$

che verifica le condizioni $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0$ e $y(1) = 1$.

3) Data la seguente forma differenziale lineare:

$$\omega(x,y) = \frac{1-x}{1+y}\, dx + \frac{x^2-2x}{2(1+y)^2}\, dy,$$

definita in $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y > -1\}$ si chiede di:

(a) verificare se ω è esatta in R;

(b) calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \cos t, \\ y(t) = t\cos t, \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Svolgimento

1) Studiamo dapprima la convergenza puntuale. Se $x \geq 0$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n^3 x e^{-n^2 x} = 0,$$

pertanto la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$.

Per studiare la convergenza uniforme bisogna valutare

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 0} n^3 x e^{-n^2 x}.$$

Studiando la derivata, si ha $f_n'(x) = n^3 e^{-n^2 x}(1 - n^2 x)$, da cui $f_n'(x) = 0$ se e solo se $x = \dfrac{1}{n^2}$, $f_n'(x) > 0$ se $0 < x < \dfrac{1}{n^2}$ e $f_n'(x) < 0$ se $x > \dfrac{1}{n^2}$. Si conclude dunque che il punto $x = \dfrac{1}{n^2}$ è un punto di massimo. Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 0} n^3 x e^{-n^2 x} = \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} n e^{-1} = +\infty$$

dunque non si ha convergenza uniforme in $[0, +\infty)$.

Per quanto riguarda il passaggio al limite sotto il segno di integrale, non possiamo applicare il teorema che sfrutta la convergenza uniforme. Tuttavia risulta direttamente

$$\int_0^1 n^3 x e^{-n^2 x}\,dx = -[nxe^{-n^2 x}]_0^1 + \int_0^1 n e^{-n^2 x}\,dx = -ne^{-n^2} - \left[\frac{e^{-n^2 x}}{n}\right]_0^1 = -ne^{-n^2} - \frac{e^{-n^2}}{n} + \frac{1}{n},$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^3 x e^{-n^2 x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \left[-ne^{-n^2} - \frac{e^{-n^2}}{n} + \frac{1}{n}\right] = 0.$$

2) Ponendo $y' = z$ e dividendo per x, l'equazione diventa

$$z' = \frac{1}{x} z + \frac{\log x}{x},$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Applicando la formula che fornisce l'integrale generale si ottiene

$$z(x) = e^{\varphi(x)} \left\{ \int \beta(x) e^{-\varphi(x)}\, dx + C \right\},$$

dove $\varphi(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log x + k$ e $\beta(x) = \dfrac{\log x}{x}$. Pertanto

$$z(x) = x \left\{ \int \frac{\log x}{x^2}\, dx + C \right\} = x \left\{ -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx + C \right\} = -\log x - 1 + Cx$$

e quindi

$$y(x) = -x + \frac{C}{2}x^2 - \int \log x\, dx = -x + \frac{C}{2}x^2 - x\log x + x + D = \frac{C}{2}x^2 - x\log x + D.$$

Imponendo le condizioni date risulta

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{C}{2}x^2 - x\log x + D \right) = D = 0,$$

$$y(1) = \frac{C}{2} = 1,$$

da cui $C = 2$ e la soluzione cercata è $y(x) = x^2 - x\log x$.

3) (a) Essendo R convesso, per verificare che ω è esatta basta provare che ω è chiusa. Poiché

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{x-1}{(1+y)^2}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{2x-2}{2(1+y)^2} = \dfrac{x-1}{(1+y)^2}, \end{cases}$$

ω è chiusa, e dunque anche esatta in R.

(b) Poiché ω è esatta in R e la curva γ è regolare, con supporto contenuto in R, detto $F(x,y)$ un potenziale di ω, si ha

$$\int_\gamma \omega = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0).$$

Cerchiamo pertanto un potenziale $F(x, y)$. Deve essere

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = X = \frac{1-x}{1+y},$$

da cui $F(x,y) = \dfrac{2x - x^2}{2(1+y)} + \varphi(y)$ e

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2-2x}{2(1+y)^2} + \varphi'(y) = Y = \frac{x^2-2x}{2(1+y)^2}$$

se e solo se $\varphi'(y) = 0$, ovvero $\varphi(y) = k$. Pertanto concludiamo che

$$F(x,y) = \frac{2x-x^2}{2(1+y)} + k,$$

$k \in \mathbb{R}$, e che

$$\int_\gamma \omega = F\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - F(x(0), y(0)) = F(1,0) - F(0,0) = \frac{1}{2}.$$

VI appello - 12 Dicembre 2005

1) Studiare la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-nx}}{1+x^n}, \quad x > -1.$$

Stabilire, motivando la risposta, se sussiste l'uguaglianza

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^2 \frac{2^{-nx}}{1+x^n}\, dx = \int_1^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-nx}}{1+x^n}\, dx.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} = y^2 \sin x, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale:

$$\int_\gamma \frac{y(1-x)}{(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}}\, ds,$$

dove γ è l'arco dell'ellisse di equazione $2x^2+y^2=1$ congiungente i punti $A = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $B = (0,1)$.

Svolgimento

1) Studiamo la convergenza puntuale. Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{-(n+1)x}}{1+x^{n+1}}\frac{1+x^n}{2^{-nx}} = 2^{-x}\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}.$$

Ora, se $-1 < x < 1$ è $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-x} < 1$ se e solo se $x > 0$, dunque la serie converge puntualmente se $0 < x < 1$, mentre non converge se $-1 < x < 0$.

Se $x = 0$ chiaramente la serie non converge.

Se $x \geq 1$ risulta $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{x\ 2^x} < 1$, pertanto la serie converge. In conclusione, la serie converge puntualmente in $]0, +\infty[$.

Studiamo ora la convergenza totale. Poiché

$$\sup_{x>0} f_n(x) \geq \lim_{x\to 0^+}\frac{2^{-nx}}{1+x^n} = 1,$$

la serie non converge totalmente in $]0, +\infty[$.

Tuttavia si ha convergenza totale in $[a, +\infty)$, per ogni $a > 0$. Infatti, se $x \geq a$, risulta

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{nx}(1+x^n)} \leq \frac{1}{2^{na}} \equiv L_n$$

e $\sum_{n=0}^{+\infty} L_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^a}\right)^n < +\infty$, essendo una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^a} < 1$.

Sussiste infine l'uguaglianza poiché la serie di funzioni converge totalmente, dunque anche uniformemente, in $[1, 2]$ e le f_n sono continue.

2) Si tratta di un'equazione differenziale di Bernuoulli, cioé $y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^s$, con $s = 2$.

Posto $z = y^{-1}$, l'equazione diventa

$$z' + \frac{z}{x} = -\sin x,$$

che è un'equazione differenziale lineare in z. Applicando la formula che fornisce l'integrale generale si ha

$$z(x) = e^{A(x)} \left(\int \beta(x) e^{-A(x)}\, dx + C \right),$$

dove $C \in \mathbb{R}$, $A(x) = -\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\log x$ e $\beta(x) = -\sin x$. Pertanto

$$z(x) = \frac{1}{x}\left[-\int x \sin x\, dx + C\right] = \frac{1}{x}\left[x\cos x - \int \cos x\, dx + C\right] = \cos x - \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}$$

e dunque

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{x}{x\cos x - \sin x + C}\ .$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2(C-1)} = 1 \ \Rightarrow\ C = \frac{\pi}{2} + 1,$$

pertanto la soluzione cercata è $y(x) = \dfrac{x}{x\cos x - \sin x + \frac{\pi}{2} + 1}$.

3) Una rappresentazione parametrica di γ è data da

$$\begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = \sqrt{1-2t^2} \end{cases} \quad ,\ t \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right],$$

pertanto si ha

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \sqrt{1 + \frac{4t^2}{1-2t^2}}\, dt = \sqrt{\frac{1+2t^2}{1-2t^2}}\, dt.$$

L'integrale risulta allora

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{y(1-x)}{(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}}\,ds &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\sqrt{1-2t^2}}{(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1+2t^2}{1-2t^2}}(1+t)\,dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1+t}{1+2t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{4t}{1+2t^2}\,dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dt}{1+2t^2} \\
&= \frac{1}{4}\log\left(1+2t^2\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{4}\log\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

I appello - 24 Marzo 2006

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n^2} + nx\right) e^{-n^2 x}, \quad x \geq 0.$$

Verificare se vale il passaggio al limite sotto il segno di derivata.

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{1+e^{-x}} = \cos x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3) Data la forma differenziale lineare:

$$\omega(x,y) = \frac{x}{1+y}\,dx + \frac{y}{1+x}\,dy,$$

calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva da $A = (0,0)$ a $D = (-1,0)$ coincidente con l'arco di parabola $y = x^2$ tra A e $B = (1,1)$ e con la spezzata che congiunge i punti B, $C = (0,1)$ e D tra B e D.

Svolgimento

1) Per quanto riguarda la convergenza puntuale, si ha $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+nx\right)e^{-n^2x}=0$, quindi la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente alla funzione $f(x)\equiv 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme. Dobbiamo valutare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 0}\left|\left(\frac{1}{n^2}+nx\right)e^{-n^2x}\right| = \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 0}\left(\frac{1}{n^2}+nx\right)e^{-n^2x}.$$

Calcoliamo dunque la derivata $f_n'(x)$: $f_n'(x)=e^{-n^2x}(n-1-n^3x)$, e dunque $f_n'(x)=0$ se e solo se $x=\frac{n-1}{n^3}$. Inoltre $f_n'(x)>0$ se $0<x<\frac{n-1}{n^3}$ e $f_n'(x)<0$ se $x>\frac{n-1}{n^3}$: concludiamo dunque che

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 0}\left(\frac{1}{n^2}+nx\right)e^{-n^2x} = \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{n-1}{n^3}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\,e^{\frac{1}{n}-1}=0,$$

e pertanto la convergenza è uniforme in $[0,+\infty)$.

Osserviamo infine che $\lim_{n\to+\infty} f_n'(0)=\lim_{n\to+\infty}(n-1)=+\infty$, dunque non vale il passaggio al limite sotto il segno di derivata.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Dalla formula risolutiva, l'integrale generale è dato da

$$y(x)=e^{-A(x)}\left(\int b(x)e^{A(x)}\,dx+C\right),$$

con $C\in\mathbb{R}$, $A(x)=\int a(x)\,dx$, dove $a(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$ e $b(x)=\cos x$. Pertanto risulta $A(x)=\int\frac{dx}{1+e^{-x}}=\int\frac{e^x}{1+e^x}\,dx=\log(1+e^x)+k$ e dunque

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log(1+e^x)}\left(\int e^{\log(1+e^x)}\cos x\,dx+C\right)\\ &= \frac{1}{1+e^x}\left(\int(1+e^x)\cos x\,dx+C\right)=\frac{1}{1+e^x}\left(\sin x+\int e^x\cos x\,dx+C\right). \end{aligned}$$

Integrando due volte per parti si ha:

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx=(\cos x+\sin x)e^x-\int e^x\cos x\,dx,$$

da cui $\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)e^x$ e quindi

$$y(x)=\frac{1}{1+e^x}\left(\sin x+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)e^x+C\right).$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene

$$y(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{1}{2},$$

quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{e^x(\cos x + \sin x) + 2\sin x - 1}{2(1+e^x)}.$$

3) La curva γ è unione delle tre curve $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$, dove

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1, \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = -t, \\ y = 1, \end{cases} \quad -1 \le t \le 0, \qquad \gamma_3 : \begin{cases} x = -t, \\ y = 1-t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

Risulta dunque $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega$. Calcoliamo separatamente i tre integrali: si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \omega &= \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} 2t\,dt = \frac{1}{2}[\log(1+t^2)]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{t^3}{1+t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log 2 + 2\int_0^1 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log 2 + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - [\log|t+1|]_0^1\right) = \frac{5}{3} - \frac{3}{2}\log 2,\end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 t\,dt = -\frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} \omega &= \int_0^1 \frac{t}{2-t}\,dt - \int_0^1 \frac{1-t}{1-t}\,dt = -\int_0^1 \frac{2-t-2}{2-t}\,dt - 1 \\ &= -2 - 2[\log|2-t|]_0^1 = -2 + 2\log 2\end{aligned}$$

e dunque

$$\int_\gamma \omega = \frac{5}{3} - \frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{4} - 2 + 2\log 2 = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{7}{12}.$$

II appello - 6 Aprile 2006

1) Studiare la continuità in $\mathbb{R}^2$ e la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3+y^4)}{(1+\sin^2 x)\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n x^{2n}}.$$

3) Calcolare l'integrale

$$\iint_T \frac{dx\,dy}{\sqrt{x+y+1}},$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,1)$; verificare poi il risultato ottenuto utilizzando le formule di Green.

Svolgimento

1) La funzione è continua se $(x,y) \neq (0,0)$, essendo composizione di funzioni continue. Nel punto $(0,0)$ dobbiamo studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^4)}{(1+\sin^2 x)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Passando in coordinate polari si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\rho^3\cos^3\theta+\rho^4\sin^4\theta)}{\rho[1+\sin^2(\rho\cos\theta)]} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\rho^3\cos^3\theta+\rho^4\sin^4\theta)}{\rho^3(\cos^3\theta+\rho\sin^4\theta)} \frac{\rho^3(\cos^3\theta+\rho\sin^4\theta)}{\rho[1+\sin^2(\rho\cos\theta)]} = 0.$$

Essendo inoltre

$$\left|\frac{\sin(\rho^3\cos^3\theta+\rho^4\sin^4\theta)}{\rho[1+\sin^2(\rho\cos\theta)]}\right| \leq \frac{\rho^3|\cos^3\theta+\rho\sin^4\theta|}{\rho[1+\sin^2(\rho\cos\theta)]} \leq \rho^2(1+\rho) \to 0,$$

se $\rho \to 0$, il limite è uniforme rispetto a θ e dunque f è continua anche in $(0,0)$, essendo $f(0,0)=0$.

Studiamo ora la derivabilità in $(0,0)$. Risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{(1+\sin^2 x)|x|x} = 0$$

e

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(y^4)}{|y|y} = 0,$$

e dunque f è derivabile in $(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Per quanto riguarda la differenziabilità in $(0,0)$, bisogna valutare

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y),$$

da cui $\varepsilon(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^4)}{(1+\sin^2 x)(x^2+y^2)}.$$

Passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\rho^3\cos^3\theta+\rho^4\sin^4\theta)}{\rho^2[1+\sin^2(\rho\cos\theta)]} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\rho^3\cos^3\theta+\rho^4\sin^4\theta)}{\rho^3(\cos^3\theta+\rho\sin^4\theta)} \frac{\rho^3(\cos^3\theta+\rho\sin^4\theta)}{\rho^2[1+\sin^2(\rho\cos\theta)]} = 0.$$

Essendo inoltre

$$\left|\frac{\sin(\rho^3\cos^3\theta+\rho^4\sin^4\theta)}{\rho^2[1+\sin^2(\rho\cos\theta)]}\right| \leq \frac{\rho^3|\cos^3\theta+\rho\sin^4\theta|}{\rho^2[1+\sin^2(\rho\cos\theta)]} \leq \rho(1+\rho) \to 0,$$

se $\rho \to 0$, il limite è uniforme rispetto a θ, quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

2) La serie si può scrivere come $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x+1}{2x^2}\right)^n$, che rappresenta una serie geometrica che converge solo se la ragione è, in valore assoluto, minore di 1. Bisogna dunque risolvere la disequazione $\left|\frac{x+1}{2x^2}\right|<1$, che risulta soddisfatta se $x>1$ oppure $x<-\frac{1}{2}$ e quindi la serie converge puntualmente in $D=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$.

Studiamo ora la convergenza uniforme. Trattandosi di una serie geometrica possiamo utilizzare la formula

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)| \;=\; \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}\left|\frac{a^{n+1}}{1-a}\right|$$

dove, nel nostro caso, la ragione è $a=\frac{x+1}{2x^2}$. Risulta dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)| \;=\; \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}\frac{\left|\frac{x+1}{2x^2}\right|^{n+1}}{\left|1-\frac{x+1}{2x^2}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}\frac{|x+1|^{n+1}}{(2x^2)^n\,|2x^2-x-1|},$$

e poiché

$$\sup_{x\in D}\frac{|x+1|^{n+1}}{(2x^2)^n\,|2x^2-x-1|}\geq\lim_{x\to1^+}\frac{|x+1|^{n+1}}{(2x^2)^n\,|2x^2-x-1|}=+\infty,$$

la serie non converge uniformemente.

3) Il dominio T si scrive come $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1-\frac{x}{2}\right\}$ e, applicando un teorema di riduzione, si ha:

$$\begin{aligned}\iint_T\frac{dx\,dy}{\sqrt{x+y+1}} &= \int_0^2\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}}\frac{dy}{\sqrt{x+y+1}}\right)dx=\int_0^2 2\sqrt{x+y+1}\Big|_0^{1-\frac{x}{2}}dx\\ &= 2\int_0^2\left(\sqrt{2+\frac{x}{2}}-\sqrt{x+1}\right)dx=\frac{8}{3}\left(2+\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2-\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2\\ &= \frac{4}{3}(3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

Dalle formule di Green si ha poi

$$\iint_T\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy \;=\; \int_{\partial T^+}f\,dy,$$

dove ∂T^+ è la frontiera di T. ∂T^+ può essere vista come l'unione dei tre segmenti γ_1, γ_2 e γ_3 parametrizzati come segue:

$$\gamma_1:\begin{cases}x(t)=t,\\ y(t)=0,\end{cases}\quad 0\le t\le 2,\quad \gamma_2:\begin{cases}x(t)=-t,\\ y(t)=1+\frac{t}{2},\end{cases}\quad -2\le t\le 0,\quad \gamma_3:\begin{cases}x(t)=0,\\ y(t)=-t,\end{cases}\quad -1\le t\le 0;$$

dunque

$$\begin{aligned}
\iint_T \frac{dx\,dy}{\sqrt{x+y+1}} &= 2\int_{\partial T^+} \sqrt{x+y+1}\,dy = 2\left(\int_{\gamma_2} \sqrt{x+y+1}\,dy + \int_{\gamma_3} \sqrt{x+y+1}\,dy\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \sqrt{2-\frac{t}{2}}\,dt - \int_{-1}^{0} \sqrt{1-t}\,dt\right) \\
&= 2\left[-\frac{2}{3}\left(2-\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{0} + \frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0}\right] = \frac{4}{3}(3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+1).
\end{aligned}$$

III appello - 30 Giugno 2006

1) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste il seguente integrale generalizzato:

$$\int_0^1 \frac{\tan \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^\alpha}}\, dx.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 6y = 3x\sqrt[3]{y^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$I = \int_{+FrD} \left[-2xy^2\, dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) dy \right],$$

dove D è dato dall'unione fra il semicerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 contenuto nel 3° e 4° quadrante e l'insieme $\{(x,y): \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ y \ge 0\}$.

Svolgimento

1) La funzione $\frac{\tan\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^\alpha}}$ risulta integrabile secondo Riemann se $\alpha \leq \frac{2}{3}$; infatti si ha $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^\alpha}} =$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}x^{\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2} > 0, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2} = 0. \end{cases}$ Invece la funzione $f(x)$ risulta illimitata in prossimità di 0, per $\alpha > \frac{2}{3}$, poiché in tal caso si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}x^{\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}} = +\infty.$$

Osserviamo che f è Riemann-integrabile in ogni intervallo $[x, 1]$, con $x > 0$, essendo una funzione continua. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}}}} = 1$$

e dunque, poiché $\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}}}$ è G-integrabile in [0,1] se e solo se $0 < \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3} < 1$, f è G-integrabile se $\alpha < \frac{8}{3}$.

2) Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli, cioè del tipo $y' = \alpha(x)y + \beta(x)y^s$, con $\alpha(x) = 6$, $\beta(x) = 3x$ e $s = \frac{2}{3}$. La funzione f ha come dominio $\mathbb{R}^2$ ed esiste un intorno di $(0, 1)$ che non contiene l'asse x in cui f'_y è limitata, dunque vale il teorema di esistenza e unicità. Per determinare la soluzione, moltiplicando per $y^{-\frac{2}{3}}$ si ottiene

$$y^{-\frac{2}{3}}y' = 6y^{\frac{1}{3}} + 3x$$

e, ponendo $z = y^{1-s} = y^{\frac{1}{3}}$, da cui $z' = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y'$, si ha

$$z' = 2z + x,$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine in z. Utilizzando la formula risolutiva

$$z(x) = e^{-A(x)}\left[\int e^{A(x)}\beta(x)\,dx + c\right],$$

con $A(x) = \int \alpha(x)\,dx$, dove nel nostro caso $\alpha(x) = -2$, da cui $A(x) = -2x+k$, $\beta(x) = x$, $c \in \mathbb{R}$, risulta

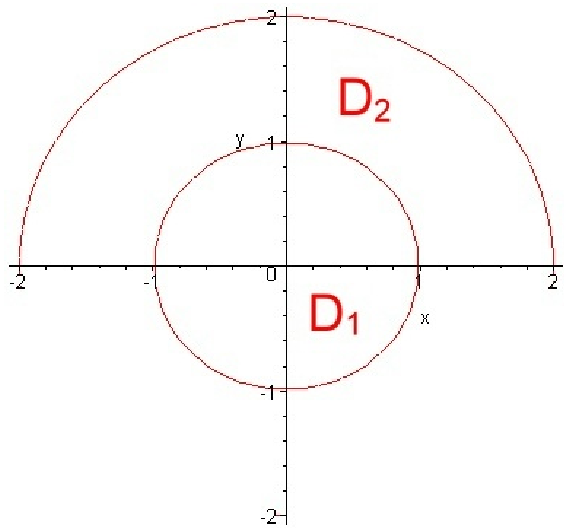
$$z(x) = e^{2x}\left[\int xe^{-2x}\,dx + c\right] = e^{2x}\left[-\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx + c\right] = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x},$$

e dunque

$$y(x) = z^3(x) = \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x}\right)^3.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ottiene $\left(c - \frac{1}{4}\right)^3 = 1$, da cui $c = \frac{5}{4}$, e quindi la soluzione cercata è $y(x) = \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{2x}\right)^3$.

3) L'insieme D è costituito dall'unione di D_1 e D_2, dove $D_1 = \{(x,y): \ x^2+y^2 \le 1, \ y \le 0\}$ e $D_2 = \{(x,y): \ 1 \le x^2+y^2 \le 4, \ y \ge 0\}$ è la corona circolare di raggi 1 e 2 contenuta nel 1° e 2° quadrante.



Utilizzando le formule di Green si ha:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D [(x^2+y^2)+4xy]\,dx\,dy = \iint_{D_1} [(x^2+y^2)+4xy]\,dx\,dy + \iint_{D_2} [(x^2+y^2)+4xy]\,dx\,dy \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Passando in coordinate polari si ha $D_1 = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2: \ \pi \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le \rho \le 1\}$, e $D_2 = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2: \ 0 \le \theta \le \pi, \ 1 \le \rho \le 2\}$, da cui, applicando un teorema di riduzione per gli integrali doppi,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\pi^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2 + 4\rho^2\cos\theta\sin\theta)\rho\,d\rho = \int_0^1 \rho^3\,d\rho \left(\pi + 4\int_\pi^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\theta\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\pi + 2\sin^2\theta|_\pi^{2\pi}\right) = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\pi d\theta \int_1^2 (\rho^2 + 4\rho^2 \cos\theta \sin\theta)\rho \, d\rho = \int_1^2 \rho^3 \, d\rho \left(\pi + 4 \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta \, d\theta \right) \\
&= \pi \frac{\rho^4}{4}\Big|_1^2 = \left(4 - \frac{1}{4} \right) \pi
\end{aligned}$$

e infine

$$I = I_1 + I_2 = 4\pi.$$

IV appello - 8 Settembre 2006

1) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+|xy|)}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}(xy), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = y^2 - x^2 + |x|$$

in $C = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$.

3) Calcolare l'area del dominio D racchiuso dall'asse x e dalla curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \qquad t \in [0,\pi].$$

Svolgimento

1) Studiamo la continuità in $(0,0)$: bisogna calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+|xy|)}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}(xy).$$

Passando in coordinate polari si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\log(1+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|)}{\sqrt[3]{\rho^4}}\rho^2\cos\theta\sin\theta$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\log(1+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|)}{\rho^2|\cos\theta\sin\theta|}\frac{\rho^4\cos\theta\sin\theta|\cos\theta\sin\theta|}{\sqrt[3]{\rho^4}} = 0,$$

tenendo presente il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$. Poiché inoltre

$$\left|\frac{\log(1+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|)}{\sqrt[3]{\rho^4}}\rho^2\cos\theta\sin\theta\right| \le \frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt[3]{\rho^4}} \le \rho^{\frac{8}{3}} \longrightarrow 0,$$

se $\rho\to 0$ (utilizzando la disuguaglianza $\log(1+x)\le x$, per ogni $x\ge 0$), tale limite è uniforme rispetto a θ e dunque f è continua in $(0,0)$, essendo $f(0,0)=0$.

Per quanto riguarda la derivabilità in $(0,0)$ risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y},$$

dunque f è derivabile in $(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Studiamo infine la differenziabilità: dobbiamo valutare

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y),$$

da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\log(1+|xy|)}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{6}}}(xy).$$

Passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\log(1+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|)}{\rho^{\frac{7}{3}}}\rho^2\cos\theta\sin\theta$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\log(1+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|)}{\rho^2|\cos\theta\sin\theta|}\frac{\rho^4\cos\theta\sin\theta|\cos\theta\sin\theta|}{\rho^{\frac{7}{3}}} = 0,$$

ed essendo

$$\left|\frac{\log(1+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|)}{\rho^{\frac{7}{3}}}\rho^2\cos\theta\sin\theta\right| \leq \frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^{\frac{7}{3}}} \leq \rho^{\frac{5}{3}} \longrightarrow 0,$$

se $\rho \to 0$, il limite è uniforme rispetto a θ, dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$ ed f è differenziabile in $(0,0)$.

2) Poiché C è compatto e f è continua, dal teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo per f in C. Osserviamo poi che $f(\pm x, \pm y) = f(x,y)$, dunque senza restrizione di generalità possiamo limitarci a studiare i punti $x \geq 0$, $y \geq 0$, dove $f(x,y) = y^2 - x^2 + x$. Per quanto riguarda i punti interni a $\widetilde{C} = \{(x,y):\ x,y \geq 0\}$ si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$$

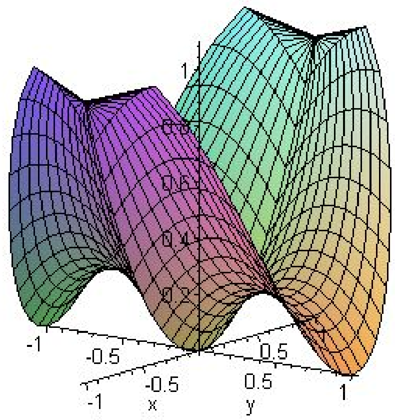
se e solo se $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 0$, e dunque gli unici punti critici sono $\left(\pm\dfrac{1}{2}, 0\right)$, che sono punti sella per f, essendo $Hf(x,y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$.

Studiamo ora la frontiera di $\widetilde{C} = \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2 + \widetilde{C}_3$, dove $\widetilde{C}_1 = \{(x,y):\ x,y \geq 0,\ y^2 = 1 - x^2\}$, $\widetilde{C}_2 = \{(x,0):\ 0 \leq x \leq 1\}$, $\widetilde{C}_3 = \{(0,y):\ 0 \leq y \leq 1\}$. Risulta $f\big|_{\widetilde{C}_2}(x,y) = f(x,0) = -x^2 + x = g_1(x)$ e poiché $g_1'(x) = -2x + 1 = 0$ se e solo se $x = \dfrac{1}{2}$, $g_1'(x) > 0$ se $0 < x < \dfrac{1}{2}$ e $g_1'(x) < 0$ se $\dfrac{1}{2} < x < 1$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ è di massimo locale, mentre $(0,0)$ e $(1,0)$ sono di minimo locale e $f\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) = \dfrac{1}{4}$ mentre $f(0,0) = f(1,0) = 0$.

Per quanto riguarda $\widetilde{C}_3$ è $f\big|_{\widetilde{C}_3}(x,y) = f(0,y) = y^2 = g_2(y)$ e dunque $g_2(y)$ è crescente in $[0,1]$.

Infine $f\big|_{\widetilde{C}_1}(x,y) = 1 - 2x^2 + x = g_3(x)$; ora, poiché $g_3'(x) = -4x + 1 = 0$ se e solo se $x = \dfrac{1}{4}$, $g_3'(x) > 0$ se $0 < x < \dfrac{1}{4}$ e $g_3'(x) < 0$ se $\dfrac{1}{4} < x < 1$, si ha che il punto $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$ è un punto di massimo locale.

In conclusione, essendo $f\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right) = \dfrac{9}{8}$, $f(0,1) = 1$, $f\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) = \dfrac{1}{4}$, i punti $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$ sono punti di massimo assoluto, mentre, essendo $f(0,0) = f(1,0) = f(-1,0) = 0$, i punti $(0,0)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono punti di minimo assoluto per f.



3) Utilizzando le formule di Gauss-Green si ha

$$Area(D) = -\int_{FrD^+} y\,dx,$$

dove nel nostro caso la frontiera di D risulta composta da un segmento sull'asse x e dalla curva γ.

Tenendo presente il fatto che il contributo sull'asse x è nullo e che γ orienta $Fr(D)$ positivamente tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, negativamente tra $\frac{\pi}{2}$ e π, ponendo $\gamma_1 := \gamma\big|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$, $\gamma_2 := \gamma\big|_{[\frac{\pi}{2},\pi]}$, si ha

$$\begin{aligned}
Area(D) &= -\int_{\gamma_1} y\,dx + \int_{\gamma_2} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sin t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2t \sin t\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\,dt - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t \cos t\,dt \\
&= \frac{2}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\sin^3 t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

V appello - 21 Settembre 2006

1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt{nx}\arctan\left(\frac{x^2+1}{n^3x^3}\right), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

2) Determinare, per $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la soluzione dell'equazione differenziale

$$y' - y\tan x = x^2$$

che passa per il punto $(0, 0)$.

3) Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = 2xy\cos(x^2)\,dx + \sin(x^2)\,dy$$

si chiede di:

(a) provare che ω è esatta in $\mathbb{R}^2$;

(b) calcolare un potenziale di ω;

(c) calcolare $\int_{\mathcal{C}} \omega$ dove $\mathcal{C}$ è la curva di equazione $y = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Svolgimento

1) Per quanto riguarda la convergenza puntuale risulta, per ogni $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{nx}\arctan\left(\frac{x^2+1}{n^3x^3}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{nx}\frac{\arctan\left(\frac{x^2+1}{n^3x^3}\right)}{\frac{x^2+1}{n^3x^3}}\ \frac{x^2+1}{n^3x^3} = 0,$$

e dunque $(f_n)_n$ converge puntualmente alla funzione limite $f(x) \equiv 0$, per ogni $x > 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme: poiché risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x>0} \left|\sqrt{nx}\arctan\left(\frac{x^2+1}{n^3x^3}\right)\right| \geq \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}+1\right) = \frac{\pi}{4} > 0,$$

la successione $(f_n)_n$ non converge uniformemente a $f(x) = 0$.

2) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Applicando la formula che fornisce l'integrale generale si ha

$$y(x) = e^{\int \alpha(x)\,dx}\left[\int \beta(x)e^{-\int \alpha(x)\,dx} + C\right],$$

dove $C \in \mathbb{R}$, $\alpha(x) = \tan x$ e $\beta(x) = x^2$, per cui $\displaystyle\int \alpha(x)\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log(\cos x) + k$.

Dunque risulta

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\log(\cos x)}\left[\int x^2 e^{\log(\cos x)}\,dx + C\right] = \frac{1}{\cos x}\left[\int x^2\cos x\,dx + C\right] \\
&= \frac{1}{\cos x}\left[x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx + C\right] \\
&= \frac{1}{\cos x}\left[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx + C\right] \\
&= \frac{1}{\cos x}\left[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\right] = (x^2-2)\tan x + 2x + \frac{C}{\cos x},
\end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Imponenendo la condizione $y(0) = 0$ si ottiene $C = 0$, da cui la soluzione richiesta è $y(x) = (x^2-2)\tan^2 x + 2x$.

3) (a) E' facile provare che ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$, essendo $\dfrac{\partial X}{\partial y} = 2x\cos(x^2) = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$, e dunque è esatta, essendo $\mathbb{R}^2$ convesso.

(b) Per definizione, se $U(x,y)$ è un potenziale di ω deve essere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2xy\cos(x^2), \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \sin(x^2). \end{cases}$$

Integrando la seconda espressione si ottiene $U(x,y) = y\sin(x^2) + \varphi(x)$, da cui $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 2xy\cos(x^2) + \varphi'(x) = X$ se e solo se $\varphi'(x) = 0$, cioè $\varphi(x)$ è costante. Pertanto ad esempio $U(x,y) = y\sin(x^2)$ è un potenziale di ω.

(c) Poiché ω è esatta, per un noto teorema risulta

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = U\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) - U(0,0) = \sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right).$$

VI appello - 12 Dicembre 2006

1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left(\frac{n}{n+x}\right), \quad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 6y = 3e^{-3x} \\ y(0) = \frac{1}{3} \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

3) Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = f(x,y)\,dx + \frac{x^2+y^2}{2y}\,dy,$$

definita nell'insieme $A = \{(x,y) : \ y > 0\}$ si chiede di:

(a) determinare la funzione $f(x,y)$ di classe $\mathcal{C}^1(A)$ tale che ω sia esatta in A e $f(x,1) = 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(b) in corrispondenza alla f trovata al punto (a) calcolare un potenziale di ω;

(c) calcolare $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \omega$ dove $\mathcal{C}$ è la curva di equazione $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

Svolgimento

1) E' facile verificare che risulta, per ogni $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{n}{n+x}\right) = 0,$$

dunque $(f_n)_n$ converge puntualmente a $f(x) \equiv 0$, per ogni $x \in [0,1]$.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, si ha

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = -\log\left(\frac{n}{n+x}\right).$$

Dovendo valutare $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ calcoliamo $\frac{d}{dx}(|f_n(x)|)$: poiché

$$\frac{d}{dx}(|f_n(x)|) = \frac{d}{dx}\left(-\log\left(\frac{n}{n+x}\right)\right) = \frac{1}{n+x} > 0,$$

per ogni $x \in [0,1]$, $|f_n(x)|$ è crescente in $[0,1]$ e dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(1)| = \lim_{n\to+\infty}\left[-\log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right] = 0.$$

Si conclude pertanto che $(f_n)_n$ converge uniformemente a $f(x) \equiv 0$ in $[0,1]$.

2) Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti.

Risolviamo l'equazione omogenea associata.

Il polinomio caratteristico è $\alpha^2 + 2\alpha + 6 = 0$, le cui soluzioni sono $\alpha = -1 \pm \sqrt{5}i$.

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dunque

$$y_H(x) = e^{-x}[A\cos\sqrt{5}x + B\sin\sqrt{5}x], \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ora, un integrale particolare sarà del tipo $\bar{y}(x) = Ce^{-3x}$, da cui $\bar{y}'(x) = -3Ce^{-3x}$ e $\bar{y}''(x) = 9Ce^{-3x}$. Sostituendo nell'equazione si ottiene $9Ce^{-3x} = 3e^{-3x}$, da cui $C = \frac{1}{3}$. Si ha dunque $\bar{y}(x) = \frac{1}{3}e^{-3x}$ e l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = e^{-x}[A\cos\sqrt{5}x + B\sin\sqrt{5}x] + \frac{1}{3}e^{-3x}.$$

Imponendo le condizioni iniziali risulta

$$\begin{cases} y(0) = A + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow \ A = 0, \\ y'(0) = B\sqrt{5} - 1 = 1 \ \Leftrightarrow \ B = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

per cui la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}\, e^{-x} \sin \sqrt{5}x + \frac{1}{3}e^{-3x}.$$

3) (a) Essendo A convesso, l'esattezza di ω è equivalente alla chiusura. Deve essere pertanto

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{x}{y};$$

da qui si ottiene che

$$f(x,y) = \int \frac{x}{y}\, dy + \varphi(x) = x \log y + \varphi(x),$$

con $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Imponendo la condizione $f(x,1) = 1$ si ottiene $\varphi(x) = 1$, da cui $f(x,y) = x \log y + 1$.

(b) Detto $U(x,y)$ un potenziale di ω si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = x \log y + 1, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{x^2 + y^2}{2y} = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{y}{2}, \end{cases}$$

da cui $U(x,y) = \dfrac{x^2}{2} \log y + x + \psi(y)$; risulta quindi $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{x^2}{2y} + \psi'(y) = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{y}{2}$ se e solo se $\psi'(y) = \dfrac{y}{2}$, cioè $\psi(y) = \dfrac{y^2}{4} + k$, con $k \in \mathbb{R}$. Ad esempio, dunque, $U(x,y) = \dfrac{x^2}{2} \log y + x + \dfrac{y^2}{4}$ è un potenziale di ω.

(c) Poiché $\mathcal{C}$ è una curva chiusa, con sostegno contenuto in A, e ω è esatta, per un noto teorema si avrà $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \omega = 0$.

I appello - 29 Giugno 2007

1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n^2x^2}\right)\right](n^2+1)x^2, \quad x > 0.$$

Verificare inoltre se vale l'uguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n^2x^2}\right)\right](n^2+1)x^2\,dx = 0.$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$xy' + y = 2x\log x, \qquad x > 0.$$

Determinare inoltre la soluzione $\bar{y}(x)$ che verifica la condizione $\lim_{x\to 0^+} \bar{y}(x) = 0$.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_D 2y\,dx\,dy,$$

dove D è la parte del semipiano $y \geq 0$ delimitata dalle curve di equazione $x^2 + y^2 = 4$ e $(x-3)^2 + y^2 = 16$.

Svolgimento

1) Studiamo dapprima la convergenza puntuale. Poiché risulta, per $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n^2x^2}\right)}{\frac{1}{n^4x^4}} \frac{(n^2+1)x^2}{n^4x^4} = 0,$$

la successione $(f_n(x))_n$ converge puntualmente alla funzione limite $f(x) = 0$.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, bisogna valutare

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x>0} \left[1-\cos\left(\frac{1}{n^2x^2}\right)\right](n^2+1)x^2.$$

Osserviamo che si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x>0} f_n(x) \geq \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} [1-\cos(1)]\frac{n^2+1}{n^2} = 1-\cos(1) > 0,$$

e dunque la convergenza non è uniforme in $]0,+\infty[$.

Se invece $x \in [1,2]$ si ha $\frac{1}{n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2}$, e dunque

$$\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^2x^2}\right)\right](n^2+1)x^2 \leq 4\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right](n^2+1),$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Da qui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[1,2]} f_n(x) \leq \lim_{n\to+\infty} 4\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right](n^2+1) = 4\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^4}}\frac{n^2+1}{n^4} = 0,$$

e pertanto $(f_n(x))_n$ converge uniformemente a $f(x) = 0$ in $[1,2]$. Allora, poiché le $f_n(x)$ sono continue in $[1,2]$, per un noto teorema vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale e dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \left[1-\cos\left(\frac{1}{n^2x^2}\right)\right](n^2+1)x^2\,dx = \int_1^2 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

2) Dividendo per x l'equazione può essere riscritta come

$$y' + \frac{y}{x} = 2\log x, \quad x > 0$$

e si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti.

Utilizzando la formula risolutiva, l'integrale generale è dato da

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(\int b(x)e^{A(x)}\,dx + C\right),$$

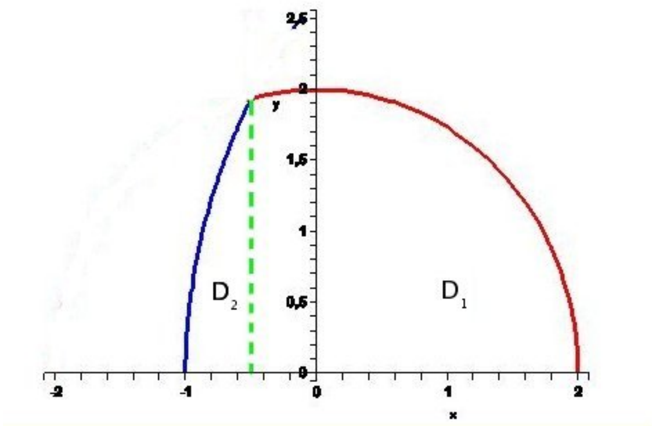
dove $C \in \mathbb{R}$, $A(x) = \displaystyle\int a(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log x + k$ e $b(x) = 2\log x$. Risulta dunque

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x}\left(2\int x\log x\,dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(x^2\log x - \int x\,dx + C\right) \\ &= x\log x - \frac{1}{2}x + \frac{C}{x}, \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \bar{y}(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[x\log x - \frac{1}{2}x + \frac{C}{x}\right] = 0$ si ottiene $C = 0$, da cui la soluzione cercata è

$$\bar{y}(x) = x\log x - \frac{1}{2}x.$$

3) Il dominio D, rappresentato in figura, è unione di D_1 e D_2, entrambi domini normali rispetto all'asse x.



Risulta in particolare

$$D_1 = \left\{(x,y):\ -\frac{1}{2} \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}$$

e

$$D_2 = \left\{(x,y):\ -1 \le x \le -\frac{1}{2},\ 0 \le y \le \sqrt{16-(x-3)^2}\right\}.$$

Inoltre

$$I := \iint_D 2y\,dx\,dy = \iint_{D_1} 2y\,dx\,dy + \iint_{D_2} 2y\,dx\,dy =: I_1 + I_2.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, applicando un teorema di riduzione si ha:

$$I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} 2y\,dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{2} (4-x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{2} = \frac{175}{24}.$$

Analogamente risulta

$$I_2 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{16-(x-3)^2}} 2y\,dy = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} [16-(x-3)^2]\,dx = \left[7x + 3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{23}{24},$$

e pertanto $I = I_1 + I_2 = \dfrac{33}{4}$.

II appello - 12 Luglio 2007

1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{x^{2n}}{n}\right), \quad x \in [-1,1].$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y = xe^{-x}y^2 \cos x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_{+Fr(D)} (x^2\,dy - y\,dx),$$

dove D è la frontiera della parte di piano delimitata dalla retta $y = 2 - 2x$ e dagli assi coordinati.

Svolgimento

1) Studiamo dapprima la convergenza puntuale. Se $x = 0$ si ottiene una serie a termini nulli, dunque convergente.

Se $x \neq 0$ si ha una serie a termini positivi con $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{x^{2n}}{n}\right)$. Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \frac{\sin\left(\frac{x^{2n+2}}{n+1}\right)}{\frac{x^{2n+2}}{n+1}} \frac{\frac{x^{2n+2}}{n+1}}{\frac{x^{2n}}{n}} \frac{\frac{x^{2n}}{n}}{\sin\left(\frac{x^{2n}}{n}\right)},$$

e dunque $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x^2$.

La serie pertanto converge puntualmente se $-1 < x < 1$.

Se $x = \pm 1$ si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, e poiché $a_n \sim b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, dal criterio del confronto asintotico la serie converge, essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ convergente. In conclusione la serie converge puntualmente in $[-1, 1]$.

Studiamo ora la convergenza uniforme. Poiché è possibile maggiorare il termine generale della serie come

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x^{2n}}{n} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

e la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è convergente, c'è convergenza totale, e quindi uniforme, in $[-1, 1]$.

2) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli, cioè del tipo $y' + a(x)y = b(x)y^s$, con $s = 2$, $a(x) = -1$ e $b(x) = xe^{-x}\cos x$.

Con la sostituzione $y = z^{\frac{1}{1-s}} = z^{-1}$, da cui $y' = -\frac{z'}{z^2}$, l'equazione diventa

$$z' + z = -xe^{-x}\cos x,$$

che è un'equazione differenziale lineare in z. Applicando la formula che fornisce l'integrale generale si ha

$$z(x) = e^{-A(x)}\left(\int \beta(x)e^{A(x)}\,dx + C\right),$$

con $C \in \mathbb{R}$, $A(x) = \displaystyle\int \alpha(x)\,dx = \int dx = x + k$ e $\beta(x) = -xe^{-x}\cos x$. Risulta pertanto

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-x}\left(-\int x\cos x\,dx + C\right) = e^{-x}\left(-x\sin x + \int \sin x\,dx + C\right) \\ &= -xe^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x + Ce^{-x}, \end{aligned}$$

e infine

$$y(x) = \frac{e^x}{C - x\sin x - \cos x}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ottiene $\dfrac{1}{C-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2$, da cui la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{e^x}{2 - x\sin x - \cos x}.$$

3) La frontiera del triangolo D, di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,2)$, risulta formata da tre segmenti, ovvero $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = -t, \\ y(t) = 2 + 2t, \end{cases} \quad t \in [-1, 0] \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = -t, \end{cases} \quad t \in [-2, 0]$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 0, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Si ottiene allora, tenendo conto del fatto che il contributo sugli assi è nullo,

$$\begin{aligned} I &= \int_{+Fr(D)} (x^2\,dy - y\,dx) = \int_{\gamma_3} (x^2\,dy - y\,dx) = \int_{-1}^{0} [2t^2 + 2t + 2]\,dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + t^2 + 2t\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Si può pervenire allo stesso risultato anche utilizzando le formule di Green, da cui

$$I = \iint_D (2x + 1)\,dx\,dy.$$

Essendo D un dominio regolare rispetto all'asse x con

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 2 - 2x\},$$

utilizzando un teorema di riduzione si ha

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (2x+1)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (2x+1)\,dy = \int_0^1 (2x+1)(2-2x)\,dx \\ &= \int_0^1 (2+2x-4x^2)\,dx = \left[2x+x^2-\frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

III appello - 11 Settembre 2007

1) Stabilire se esiste il seguente integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\, dx.$$

2) Determinare, dopo averne giustificato l'esistenza, i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x - 2xy + y^2$$

in $Q = [0,1] \times [0,1]$.

3) Calcolare il volume del solido D delimitato dai piani $z = 0$ e $z = x + 2$ e dal cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 4$.

Svolgimento

1) Osserviamo che si può scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\, dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\, dx.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x+1} = 0,$$

dunque $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}(x+1)}$ è limitata in prossimità di 0 e pertanto integrabile alla Riemann, essendo estendibile con continuità in $[0,1]$.

Studiamo ora il secondo integrale.
Osserviamo che risulta $0 \le f(x) \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)} = g(x)$ e $g(x)$ è G-integrabile in $[1,+\infty)$, in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$$

per $\alpha = \dfrac{4}{3} > 1$. Pertanto, dal criterio del confronto, anche $f(x)$ è G-integrabile in $[1,+\infty)$.
Quindi $f(x)$ è G-integrabile in $\mathbb{R}_0^+$.

2) Essendo Q compatto ed f continua, dal teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo in Q. Per quanto riguarda i punti interni a Q, risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

se e solo se $x = y = \dfrac{1}{2}$, e dunque l'unico punto critico è $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Essendo poi

$$\det\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ è un punto sella.

Studiamo ora la frontiera di Q, la quale può essere suddivisa nei quattro segmenti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dove $\alpha = \{(x,0) : \ 0 \le x \le 1\}$, $\beta = \{(1,y) : \ 0 \le y \le 1\}$, $\gamma = \{(x,1) :$

$0 \le x \le 1\}$ e $\delta = \{(0, y) :\ 0 \le y \le 1\}$. Si ha $f\big|_\alpha(x, y) = f(x, 0) = x = g_1(x)$, crescente in $[0, 1]$, $f\big|_\beta(x, y) = f(1, y) = (1-y)^2 = g_2(y)$, decrescente in $[0, 1]$, $f\big|_\gamma(x, y) = f(x, 1) = 1 - x = g_3(x)$, decrescente in $[0, 1]$ e infine $f\big|_\delta(x, y) = f(0, y) = y^2 = g_4(y)$, crescente in $[0, 1]$. Si conclude pertanto che i punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$, in cui f assume il valore 0, sono di minimo assoluto, mentre $(0, 1)$ e $(1, 0)$, in cui f vale 1, sono di massimo assoluto.

3) Il solido D può essere rappresentato come

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le x + 2,\ (x, y) \in \widetilde{D}\},$$

dove $\widetilde{D} = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \le 4\}$.

Utilizzando un teorema di riduzione risulta pertanto

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_{\widetilde{D}} \left(\int_0^{x+2} dz \right) dx\,dy = \int_{\widetilde{D}} (x + 2)\,dx\,dy.$$

Passando in coordinate polari si ha $\widetilde{D} = \{(\rho, \theta) :\ \theta \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0, 2]\}$ e dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(D) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \rho(\rho\cos\theta + 2)\,d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\cos\theta + \rho^2 \right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3}\cos\theta + 4 \right) d\theta = \left[\frac{8}{3}\sin\theta + 4\theta \right]_0^{2\pi} = 8\pi. \end{aligned}$$

IV appello - 21 Settembre 2007

1) Studiare la continuità in $\mathbb{R}^2$ e la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{(2+\sqrt[3]{|x+y|})(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y^{(4)}-13y''+36y=e^{2x}.$$

3) Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y)=(3x^2y-y^2)\,dx+(f(x)-2xy)\,dy$$

si chiede di:

(a) determinare la funzione $f\in C^1(\mathbb{R})$ tale che ω sia esatta nel suo dominio D e che, nel punto 0, assuma il valore 1;

(b) in corrispondenza alla f trovata al punto (a) calcolare un potenziale di ω;

(c) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è l'arco di parabola $y=x^2+2$, $x\in[0,1]$.

Svolgimento

1) La funzione è senz'altro continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, in quanto somma, prodotto e composizione di funzioni continue. Studiamo ora il punto $(0,0)$, calcolando il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{(2+\sqrt[3]{|x+y|})(x^2+y^2)}$. Passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{2+\sqrt[3]{\rho|\cos\theta+\sin\theta|}} = 0,$$

e inoltre $\dfrac{\rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{2+\sqrt[3]{\rho|\cos\theta+\sin\theta|}} \leq \rho^2 \to 0$, per $\rho\to 0$. Il limite, pertanto, è uniforme rispetto a θ e dunque f è continua anche in $(0,0)$, essendo $f(0,0)=0$.

Per quanto riguarda la derivabilità in $(0,0)$ si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2+\sqrt[3]{|x|}} = 0$$

e

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{2+\sqrt[3]{|y|}} = 0,$$

dunque f è derivabile in $(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Riguardo alla differenziabilità, infine, bisogna valutare

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y),$$

da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{(2+\sqrt[3]{|x+y|})(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Passando in coordinate polari si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{2+\sqrt[3]{\rho|\cos\theta+\sin\theta|}} = 0,$$

con $\dfrac{\rho(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{2+\sqrt[3]{\rho|\cos\theta+\sin\theta|}} \leq \rho \to 0$, per $\rho\to 0$ e dunque, essendo il limite uniforme rispetto a θ, si ha che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y) = 0$. Pertanto si conclude che f è differenziabile in $(0,0)$.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del quarto ordine a coefficienti costanti non omogenea.

Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$. Il polinomio caratteristico è $\lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = 0$, le cui soluzioni sono ± 2 e ± 3; l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dunque

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x},$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa. Risulta $\beta(x) = e^{\alpha x} P(x)$ con $\alpha = 2$ soluzione del polinomio caratteristico di molteplicità 1 e $P(x) = 1$: una soluzione particolare, pertanto, è della forma $\bar{y}(x) = Axe^{2x}$, $A \in \mathbb{R}$, da cui $\bar{y}''(x) = 4A(1+x)e^{2x}$ e $\bar{y}^{(4)}(x) = 16A(2+x)e^{2x}$. Sostituendo nell'equazione data si ottiene $-20Ae^{2x} = e^{2x}$, da cui $A = -\dfrac{1}{20}$ e la soluzione particolare cercata è $\bar{y}(x) = -\dfrac{x}{20}e^{2x}$. Infine, l'integrale generale dell'equazione risulta

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x} - \frac{x}{20}e^{2x},$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$.

3) (a) Essendo $D = \mathbb{R}^2$ convesso, ω è esatta se e solo se è chiusa. Poiché

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial y} = 3x^2 - 2y, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = f'(x) - 2y, \end{cases}$$

si ha $\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$ se e solo se $f'(x) = 3x^2$, da cui $f(x) = x^3 + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Poiché deve essere inoltre $f(0) = c = 1$, la funzione cercata è $f(x) = x^3 + 1$ e la forma differenziale lineare diventa

$$\omega(x, y) = (3x^2 y - y^2)\, dx + (x^3 - 2xy + 1)\, dy.$$

(b) Se $U(x, y)$ è un potenziale di ω, si deve avere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 y - y^2, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = x^3 - 2xy + 1. \end{cases}$$

Dalla prima espressione si ottiene $U(x,y) = x^3y - xy^2 + \varphi(y)$, da cui $\dfrac{\partial U}{\partial y} = x^3 - 2xy + \varphi'(y) = x^3 - 2xy + 1$ se e solo se $\varphi'(y) = 1$, cioè $\varphi(y) = y + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Quindi ad esempio $U(x,y) = x^3y - xy^2 + y$ è un potenziale di ω.

(c) Poiché ω è esatta, per un noto teorema risulta

$$\int_\gamma \omega = U(1,3) - U(0,2) = -5.$$

V appello - 1 Febbraio 2008

1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{x \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Verificare inoltre se vale la relazione

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+2}\, dx = 0.$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$I = \iint_D (1+x)\, dx\, dy,$$

dove D è la parte di piano racchiusa dalle curve $y = x^2 - 1$ e $x^2 + y^2 = 1$.

3) Calcolare l'area del dominio regolare D racchiuso dalla curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t - t^2, \\ y(t) = t^2 - t^3, \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

Svolgimento

1) Fissato $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+2} = 0,$$

per cui $(f_n(x))_n$ converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, bisogna valutare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\left|x\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|}{n+2}$$

e poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{n\to+\infty} |f_n(n)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin 1}{n+2} = \sin 1 > 0,$$

la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$.

In $[0,1]$ tuttavia la successione $(f_n(x))_n$ converge uniformemente a $f(x) \equiv 0$; infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n+2} = 0.$$

Inoltre le funzioni $f_n(x)$ sono integrabili in $[0,1]$, dal momento che sono continue. Vale pertanto il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+2}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{x\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+2}\,dx = 0.$$

2) Il dominio D è unione di D_1 e D_2, dove

$$D_1 = \{(x,y) :\ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},$$

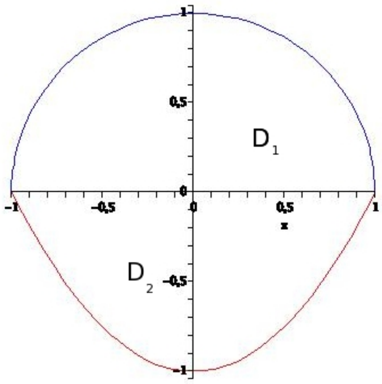
$$D_2 = \{(x,y) :\ -1 \leq x \leq 1,\ x^2 - 1 \leq y \leq 0\},$$

e dunque

$$I = \iint_{D_1} (1+x)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (1+x)\,dx\,dy.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, passando in coordinate polari si ha $D_1 = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ e

$$\iint_{D_1} (1+x)\,dx\,dy = \int_0^1 d\rho \int_0^\pi (1+\rho\cos\theta)\rho\,d\theta = \int_0^1 \rho[\theta + \rho\sin\theta]_0^\pi\,d\rho$$
$$= \int_0^1 \pi\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}.$$



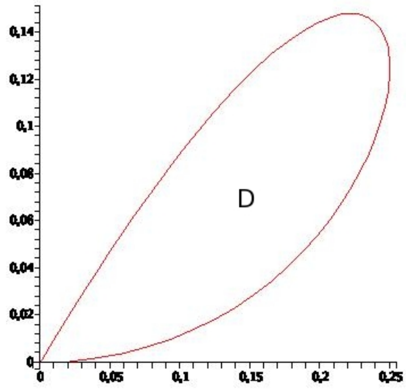
Per quanto riguarda il secondo integrale risulta

$$\begin{aligned}\iint_{D_2}(1+x)\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}(1+x)\,dx\int_{x^2-1}^{0}dy = \int_{-1}^{1}(1+x)(1-x^2)\,dx\\ &= \int_{-1}^{1}(1+x-x^2-x^3)\,dx = \left[x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Si conclude dunque che $I = \dfrac{4}{3}+\dfrac{\pi}{2}$.

3) Utilizzando le formule di Gauss-Green risulta:

$$\begin{aligned}A(D) &= \int_\gamma x\,dy = \int_0^1 (t-t^2)(2t-3t^2)\,dt = \int_0^1 (2t^2-5t^3+3t^4)\,dt\\ &= \left[\frac{2}{3}t^3-\frac{5}{4}t^4+\frac{3}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{5}{4}+\frac{3}{5} = \frac{1}{60}.\end{aligned}$$



VI appello - 26 Febbraio 2008

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e assoluta della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(x^n)}{2^n}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

2) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$$

che verifica le condizioni $y(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

3) Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = (f(y) - 2x)\, dx + 2(x - y)\, dy$$

si chiede di

(a) determinare una funzione $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tale che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$ e calcolare un potenziale di ω;

(b) in corrispondenza alla f trovata al punto (a), calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva di equazione $3x^2 + y^2 = 1$.

Svolgimento

1) Studiamo la convergenza puntuale. Si tratta di una serie a termini positivi, pertanto applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(x^{n+1})}{\cos(x^n)} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

e dunque la serie converge puntualmente in $[0,1]$.

Studiamo ora la convergenza totale. Risulta, per ogni $x \in [0,1]$,

$$\frac{\cos(x^n)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

e $\frac{1}{2^n}$ è il termine generale di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, dunqe convergente. Concludiamo pertanto che c'è convergenza totale, e quindi anche assoluta e uniforme, in $[0,1]$.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti.

Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata $y'' - 2y' - 3y = 0$. Poiché il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, le cui soluzioni sono -1 e 3, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Per quanto riguarda l'equazione completa, poiché il termine a secondo membro è $\beta(x) = 4e^{-x}$, cerchiamo una soluzione particolare della forma $\overline{y}(x) = Axe^{-x}$, dal momento che -1 è soluzione del polinomio caratteristico.
Poiché $\overline{y}'(x) = Ae^{-x} - Axe^{-x}$ e $\overline{y}''(x) = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$, sostituendo nell'equazione di partenza si ha

$$-4Ae^{-x} = 4Ae^{-x},$$

da cui $A = -1$, e dunque $\overline{y}(x) = -xe^{-x}$.
L'integrale generale è dato allora da $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - xe^{-x}$.

Imponendo ora la condizione $y(0) = 0$ si ottiene $c_1 + c_2 = 0$, cioè $c_1 = -c_2$. Per avere, infine, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} [c_1(e^{-x} - e^{3x}) - xe^{-x}] = 0$, deve essere $c_1 = 0$, da cui la soluzione cercata è

$$y(x) = -xe^{-x}.$$

3) (a) Poiché $\mathbb{R}^2$ è convesso, l'esattezza di ω è equivalente alla chiusura. Dal momento che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial y} = f'(y), \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 2, \end{cases}$$

affinché ω sia chiusa deve essere $f'(y) = 2$, da cui $f(y) = 2y$, ad esempio.

Detto $F(x, y)$ un potenziale di ω deve essere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2(y - x), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2(x - y). \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $F(x, y) = 2xy - x^2 + \varphi(y)$, e dunque $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2x + \varphi'(y) = 2x - 2y$ se e solo se $\varphi'(y) = -2y$, da cui $\varphi(y) = -y^2 + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Pertanto ad esempio $F(x, y) = 2xy - x^2 - y^2$ è un potenziale di ω.

In alternativa, si può anche osservare che la forma differenziale lineare ω è positivamente omogenea di grado $\alpha = 1$, e dunque un potenziale può essere calcolato tramite la formula

$$F(x, y) = \frac{xX(x, y) + yY(x, y)}{\alpha + 1} = \frac{1}{2}\left(2x(y - x) + 2y(x - y)\right) = 2xy - x^2 - y^2.$$

(b) Poiché ω è esatta e γ è una curva chiusa, per un noto teorema risulta $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.

I appello - 30 Giugno 2008

1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n+2}}{x} \log\left(\frac{n+x^2}{n}\right), \quad x > 0, \quad n \geq 1.$$

Verificare inoltre se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^3 \frac{\sqrt{n+2}}{x} \log\left(\frac{n+x^2}{n}\right) dx = 0.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{t}{1-t^2}\, y = t y^{-1}, \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad -1 < t < 1.$$

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\partial T^+} (y\, dx + x^2\, dy),$$

dove ∂T è la frontiera del triangolo T di vertici $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (1,2)$.

Svolgimento

1) Studiamo la convergenza puntuale. Risulta, per ogni $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{x}\log\left(\frac{n+x^2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x\sqrt{n+2}}{n}\frac{\log\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)}{\dfrac{x^2}{n}} = 0,$$

da cui $(f_n(x))_n$ converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$, $x > 0$.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme osserviamo che risulta

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{x>0} \frac{\sqrt{n+2}}{x}\log\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\\ &\geq \lim_{n\to+\infty} f_n(\sqrt{n}) = \log 2 > 0,\end{aligned}$$

pertanto la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}^+$.

Tuttavia, se $x \in [1,3]$ risulta

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sup_{1\leq x\leq 3} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{1\leq x\leq 3} \frac{\sqrt{n+2}}{x}\log\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}\log\left(1+\frac{9}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 9\frac{\sqrt{n+2}}{n}\log\frac{\left(1+\dfrac{9}{n}\right)}{\dfrac{9}{n}} = 0.\end{aligned}$$

La successione $(f_n(x))_n$ converge dunque uniformemente a $f(x) \equiv 0$ in $[1,3]$ e, poiché le $f_n(x)$ sono continue in $[1,3]$, vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^3 \frac{\sqrt{n+2}}{x}\log\left(\frac{n+x^2}{n}\right)dx = \int_1^3 \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{x}\log\left(1+\frac{x^2}{n}\right)dx = 0.$$

2) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli del tipo $y' = \alpha(t)y + \beta(t)y^s$, con $\alpha(t) = -\dfrac{t}{1-t^2}$, $\beta(t) = t$, $s = -1$.

Con la sostituzione $z = y^{1-s} = y^2$, da cui $y = \sqrt{z}$ e $y' = \dfrac{z'}{2\sqrt{z}}$, l'equazione diventa

$$z' + \frac{2t}{1-t^2} z = 2t,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine in z. Applicando la formula che fornisce l'integrale generale risulta

$$z(t) = e^{A(t)} \left[\int e^{-A(t)} \overline{\beta}(t)\, dt + C \right],$$

dove $A(t) = -\displaystyle\int \frac{2t}{1-t^2}\, dt = \log(1-t^2)$, $\overline{\beta}(t) = 2t$. Pertanto si ha

$$z(t) = e^{\log(1-t^2)} \left[\int 2t e^{-\log(1-t^2)}\, dt + C \right] = (1-t^2)\Big(C - \log(1-t^2)\Big),$$

da cui

$$y(t) = \sqrt{z(t)} = \sqrt{1-t^2}\sqrt{C - \log(1-t^2)}.$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ottiene $C = 1$, per cui la soluzione cercata è

$$y(t) = \sqrt{1-t^2}\sqrt{1 - \log(1-t^2)}.$$

3) La frontiera di T può essere vista come l'unione di tre segmenti, α, β, γ, dove

$$\alpha : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 0, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2$$

mentre una rappresentazione parametrica di β e γ, con l'orientazione opposta, è data da

$$\beta^- : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 4 - 2t, \end{cases} \qquad 1 \le t \le 2, \qquad \gamma^- : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 2t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1.$$

Risulta pertanto

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\partial T^+} (y\,dx + x^2\,dy) = -\int_{\gamma^-} (y\,dx + x^2\,dy) - \int_{\beta^-} (y\,dx + x^2\,dy) \\ &= -\int_0^1 2t\,dt - \int_0^1 2t^2\,dt - \int_1^2 (4-2t)\,dt + \int_1^2 2t^2\,dt = 2. \end{aligned}$$

In alternativa è possibile utilizzare le formule di Gauss-Green, ottenendo

$$I = \int_{\partial T^+} (y\,dx + x^2\,dy) = \iint_T (2x-1)\,dx\,dy,$$

dove $T = \left\{(x,y) :\ 0 \le y \le 2,\ \frac{y}{2} \le x \le 2 - \frac{y}{2}\right\}$. Essendo T un dominio normale rispetto all'asse y, per un teorema di riduzione risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2-\frac{y}{2}} (2x-1)\,dx = \int_0^2 [x^2 - x]_{\frac{y}{2}}^{2-\frac{y}{2}}\,dy \\ &= \int_0^2 \left[\left(2 - \frac{y}{2}\right)^2 - 2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2}\right] dy = \int_0^2 (2-y)\,dy = \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 2. \end{aligned}$$

II appello - 14 Luglio 2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale in $\mathbb{R}$ della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+(\sin x)^{2n}}{n}.$$

2) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y = xe^{-x}$$

che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

3) Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \left(2xy + \frac{1}{x}\right) dx + f(x)\, dy, \quad x > 0,$$

si chiede di:

(a) determinare una funzione $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ tale che ω sia esatta in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$;

(b) in corrispondenza alla f trovata al punto (a), calcolare un potenziale di ω;

(c) calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = t, \end{cases}$ $t \in [0,1]$.

Svolgimento

1) Studiamo dapprima la convergenza totale. Posto $a_n(x) = (-1)^n \dfrac{1 + (\sin x)^{2n}}{n}$, poiché

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1 + (\sin x)^{2n}}{n} = \frac{2}{n}$$

e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$ è divergente, la serie data non converge totalmente.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, trattandosi di una serie a termini di segno alterno, risulta

$$|R_n(x)| \le |a_{n+1}(x)| = \frac{1 + (\sin x)^{2n+2}}{n+1},$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, e dunque

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \le \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1 + (\sin x)^{2n+2}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

da cui la serie converge uniformemente, e dunque anche puntualmente in $\mathbb{R}$.

2) Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione omogenea associata è $y'' - 2y = 0$, il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2 = 0$, di cui $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ sono soluzioni. Pertanto, la soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_H(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiché $\beta(x) = xe^{-x}$, una soluzione particolare dell'equazione completa è $\overline{y}(x) = (Ax + B)e^{-x}$. Risulta $\overline{y}''(x) = -2Ae^{-x} + Axe^{x} + Be^{-x}$, per cui, sostituendo nell'equazione di partenza, si ottiene $(-2A - B)e^{-x} - Axe^{-x} = xe^{-x}$. Devono essere dunque $A = -1$

e $B = 2$, da cui una soluzione particolare è $\overline{y}(x) = (2 - x)e^{-x}$ e l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + (2 - x)e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Affinché la condizione $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} c_1 e^{\sqrt{2}x} = 0$ sia verificata deve essere $c_1 = 0$ e imponendo poi la condizione $y(0) = c_2 + 2 = 0$ si ottiene $c_2 = -2$. La soluzione cercata è dunque

$$y(x) = -2e^{-\sqrt{2}x} + (2 - x)e^{-x}.$$

3) (a) L'insieme $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ è convesso, dunque l'esattezza di ω è equivalente alla chiusura. Deve essere pertanto $\dfrac{\partial X}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial Y}{\partial x} = f'(x)$, per cui ad esempio $f(x) = x^2$ è tale che $\omega(x, y)$ è esatta.

(b) Detto $F(x, y)$ un potenziale di ω, deve essere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = X = 2xy + \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Y = x^2. \end{cases}$$

Integrando la seconda espressione si ottiene $F(x, y) = x^2 y + g(x)$, da cui $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xy + g'(x) = X$ se e solo se $g'(x) = \dfrac{1}{x}$, cioè $g(x) = \log x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Pertanto ad esempio $F(x, y) = x^2 y + \log x$ è un potenziale di ω.

(c) Essendo $F(x.y) = x^2 y + \log x$ un potenziale di ω, e γ una curva regolare con supporto contenuto in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, per un noto teorema risulta

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(e, 1) - F(1, 0) = e^2 + 1.$$

III appello - 8 Settembre 2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2},$$

determinare il suo dominio D e i punti di massimo e minimo assoluti di f in D.

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{2}{3}\, y = 4\, \dfrac{\cos x}{\sqrt{y}}\, e^{2x}, \\ y(0) = \sqrt[3]{9}. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \left(\sqrt{2 - x^2} + \frac{y}{2 + x^2} \right) ds,$$

dove γ è il tratto della curva di equazione $x^2 + y^2 = 2$ che congiunge i punti $A = (\sqrt{2}, 0)$ e $B = (0, \sqrt{2})$.

Svolgimento

1) Affinché f sia ben definita deve essere $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, cioè $x^2 + y^2 \leq 4$: il dominio di f è dunque il disco delimitato dalla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2, ovvero $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Poiché f è continua in D, essendo composizione di funzioni continue, e D è compatto, per il teorema di Weiertrass f ammette massimo e minimo assoluti in D.

Studiamo dapprima i punti di D°. Risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \end{cases}$$

dunque il gradiente di f si annulla soltanto in $(0,0)$ e $f(0,0) = 2$. Osserviamo che $f(x,y) \geq 0$, per ogni $(x,y) \in D$, e che, per ogni $(x,y) \in \partial D$, si ha $f(x,y) = 0$. Si conclude dunque che i punti di ∂D sono di minimo assoluto, mentre $(0,0)$ è punto di massimo assoluto per f.

2) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli, cioè del tipo $y' + a(x)y = b(x)y^s$, con $s = -\frac{1}{2}$, $a(x) = -\frac{2}{3}$, $b(x) = 4\cos x\ e^{2x}$.

Operando la sostituzione $z = y^{1-s} = y^{\frac{3}{2}}$, da cui $y = z^{\frac{2}{3}}$ e $y' = \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}z'$, l'equazione diventa

$$z' - z = 6e^{2x}\cos x,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine in z. Utilizzando la formula che fornisce l'integrale generale si ha

$$z(x) = e^{A(x)}\left[\int e^{-A(x)}\beta(x)\,dx + C\right],$$

con $A(x) = \displaystyle\int dx = x$ e $\beta(x) = 6e^{2x}\cos x$. Risulta pertanto

$$z(x) = e^x \left[6 \int e^x \cos x\, dx + C\right],$$

con $C \in \mathbb{R}$. Poiché, integrando due volte per parti, si ottiene che $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$, si conclude che

$$z(x) = e^x \left[3e^x(\sin x + \cos x + C)\right] = 3e^{2x}(\sin x + \cos x) + Ce^x,$$

da cui

$$y(x) = [3e^{2x}(\sin x + \cos x) + Ce^x]^{\frac{2}{3}}.$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(0) = (3 + C)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$, si ha $C = 0$, da cui la soluzione cercata è

$$y(x) = [3e^{2x}(\sin x + \cos x)]^{\frac{2}{3}}.$$

3) Una parametrizzazione di γ è data da

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t, \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t, \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Risulta pertanto

$$I := \int_\gamma \left(\sqrt{2 - x^2} + \frac{y}{2 + x^2}\right) ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2(1 - \cos^2 t)} + \frac{\sqrt{2}\sin t}{2(1 + \cos^2 t)}\right) \sqrt{2}\, dt$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt = 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt.$$

Per calcolare $J := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt$ si può operare il cambiamento di variabile $\cos t = u$, da cui $du = -\sin t\, dt$. Risulta dunque

$$J = -\int_1^0 \frac{du}{1 + u^2}\, du = [\arctan u]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

da cui $I = 2 + \dfrac{\pi}{4}$.

IV appello - 22 Settembre 2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}_0^+$ della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = n^2 x^4 e^{1-\sqrt{nx}}.$$

Verificare inoltre se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 n^2 x^4 e^{1-\sqrt{nx}}\, dx = 0.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{1+e^{-x}} = xe^{-x}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3) Calcolare il volume del solido racchiuso dai paraboloidi di equazione $z = 2x^2 + 2y^2$ e $z = x^2 + y^2 + 4$.

Svolgimento

1) Studiamo dapprima la convergenza puntuale. Poiché risulta, per ogni $x \in \mathbb{R}_0^+$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n^2x^4e^{1-\sqrt{n}x} = 0$, la successione converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$. Osserviamo poi che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_0^+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_0^+} n^2x^4e^{1-\sqrt{n}x} \geq \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1,$$

per cui non c'è convergenza uniforme in $\mathbb{R}_0^+$. Tuttavia, se $x \in [1,2]$, si ha $f_n(x) \leq 16n^2e^{1-\sqrt{n}}$, da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} 16n^2e^{1-\sqrt{n}} = 0.$$

La successione, pertanto, converge uniformemente a $f(x) \equiv 0$ in $[1,2]$. Le funzioni $f_n(x)$ sono poi integrabili in $[1,2]$, essendo continue. Allora, per un noto teorema, sussiste il passaggio al limite sotto il segno di integrale, da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 n^2x^4e^{1-\sqrt{n}x}\,dx = \int_1^2 \lim_{n\to+\infty} n^2x^4e^{1-\sqrt{n}x}\,dx = 0.$$

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.

Utilizzando la formula risolutiva si ha

$$y(x) = e^{A(x)}\left[\int e^{-A(x)}\beta(x)\,dx + C\right],$$

dove $A(x) = -\int \frac{dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = -\log(1+e^x)$, $\beta(x) = xe^{-x}$ e $C \in \mathbb{R}$. Risulta pertanto

$$y(x) = e^{-\log(1+e^x)}\left[\int e^{\log(1+e^x)}xe^{-x}\,dx + C\right] = \frac{1}{1+e^x}\left[\int (xe^{-x}+x)\,dx + C\right]$$
$$= \frac{1}{1+e^x}\left[\frac{x^2}{2} - xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx + C\right] = \frac{1}{1+e^x}\left[\frac{x^2}{2} - xe^{-x} - e^{-x} + C\right].$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(0) = \dfrac{C-1}{2} = 0$ si ottiene $C = 1$, da cui la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{1+e^x}\left[\frac{x^2}{2} - (x+1)e^{-x} + 1\right].$$

3) Il solido E dato è delimitato inferiormente dal paraboloide $z = 2(x^2+y^2)$ e superiormente dal paraboloide $z = x^2 + y^2 + 4$, cioè

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2(x^2 + y^2) \le z \le x^2 + y^2 + 4\}.$$

Passando in coordinate cilindriche, una rappresentazione di E è

$$E = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le \rho \le 2, \ 2\rho^2 \le z \le \rho^2 + 4\}.$$

Utilizzando un teorema di riduzione risulta dunque

$$\begin{aligned} Vol(E) &= \iiint_E dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\,d\rho \int_{2\rho^2}^{\rho^2+4} dz = 2\pi \int_0^2 (4\rho - \rho^3)\,d\rho \\ &= 2\pi \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi. \end{aligned}$$

V appello - 2 Febbraio 2009

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 1.$$

Verificare inoltre se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) dx = 0.$$

2) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' - 15y' = 4e^{3x}$$

che soddisfa le condizioni $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$ e $y(0) = 1$.

3) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D (2x - 2y + 1)\, dx\, dy,$$

dove D è la parte di piano racchiusa dagli assi coordinati e dalle rette $y = 1$ e $y = 2 - x$.

Svolgimento

1) Per quanto riguarda la convergenza puntuale risulta, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 0,$$

da cui $(f_n(x))_n$ converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. Studiamo ora la convergenza uniforme. Risulta

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right| \\ &\geq \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\sqrt[4]{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 > 0,\end{aligned}$$

e dunque la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$. Se $x \in [0,1]$ risulta tuttavia $f_n(x) \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$, per ogni $n > 1$, da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 0.$$

Da ciò segue che la successione converge uniformemente a $f(x)$ in $[0,1]$ e dunque, poiché le $f_n(x)$ sono continue, quindi integrabili in $[0,1]$, sussiste il passaggio al limite sotto il segno di integrale, per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx = 0.$$

2) Si tratta di un'equazione differenziale del terzo ordine a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione omogenea associata è

$$y''' + 2y'' - 15y' = 0.$$

Poiché il polinomio caratteristico è $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 15\lambda = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -5$, la soluzione dell'omogenea associata è

$$y_H(x) = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-5x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Essendo poi $\beta(x) = 4e^{3x}$ del tipo $P(x)e^{kx}$, con $k = 3$ soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1, una soluzione dell'equazione completa sarà del tipo

$$\overline{y}(x) = Axe^{3x}.$$

Risulta dunque

$$\overline{y}'(x) = 3Axe^{3x} + Ae^{3x},$$

$$\overline{y}''(x) = 9Axe^{3x} + 6Ae^{3x},$$

$$\overline{y}'''(x) = 27Axe^{3x} + 27Ae^{3x},$$

da cui, sostituendo nell'equazione completa, si ha

$$24Ae^{3x} = 4e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{6}.$$

Pertanto una soluzione particolare è $\overline{y}(x) = \dfrac{x}{6}e^{3x}$ e l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-5x} + \frac{x}{6}e^{3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo ora la condizione $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$ si ottiene che $c_1 = c_3 = 0$. Infine $y(0) = c_2 = 1$, da cui la soluzione cercata è

$$y(x) = e^{3x}\left(1 + \frac{x}{6}\right).$$

3) Utilizzando le formule di Gauss-Green si ha

$$I := \iint_D (2x-2y+1)\,dx\,dy = \iint_D 2(x-y)\,dx\,dy + Area(D) = \frac{3}{2} + \int_{\partial D^+} (x^2-2xy)\,dy,$$

dove ∂D^+ è la frontiera di D, orientata positivamente. Osserviamo che $\partial D^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, dove

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 0, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1, \qquad \gamma_2^- : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 2-t, \end{cases} \quad 1 \le t \le 2,$$

$$\gamma_3^- : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 1, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1, \qquad \gamma_4^- : \begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

Poiché su γ_1 e γ_3 $dy = 0$, risulta

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2} - \int_{\gamma_2^-} (x^2-2xy)\,dy - \int_{\gamma_4^-} (x^2-2xy)\,dy = \frac{3}{2} + \int_1^2 (t^2 - 2t(2-t))\,dt \\ &= \frac{3}{2} + \int_1^2 (3t^2-4t)\,dt = \frac{3}{2} + [t^3-2t^2]_1^2 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

In alternativa si può risolvere direttamente l'integrale doppio, osservando che D è un dominio normale rispetto all'asse y, essendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le 2-y\}$. Pertanto, per un teorema di riduzione,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-y} (2x-2y+1)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[x^2 - 2xy + x\right]_0^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 (3y^2 - 9y + 6)\,dy = \left[y^3 - \frac{9}{2}y^2 + 6y \right]_0^1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

VI appello - 16 Febbraio 2009

1) Studiare la convergenza puntuale e totale in $\mathbb{R}$ della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)}{n^2+1}.$$

Verificare inoltre se sussiste l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{n \log\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}{n^2+1}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}{n^2+1}\, dx.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x} y + y^2 \cos x = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3) Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dx + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dy$$

si chiede di:

(a) trovare una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che ω sia esatta nel suo insieme di definizione;

(b) in corrispondenza alla f trovata al punto (a), calcolare la primitiva che, nel punto $(0,0)$, assume il valore 1;

(c) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è il tratto di ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ contenuto nel primo quadrante, orientato positivamente.

Svolgimento

1) Si tratta di una serie a termini di segno positivo. Per quanto riguarda la convergenza puntuale. osserviamo che, tenendo conto della disuguaglianza $\log(1+x) \leq x$, per ogni $x \geq 0$, risulta

$$f_n(x) := \frac{n \log\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)}{n^2+1} \leq \frac{x^2}{n^2+1} \leq \frac{x^2}{n^2},$$

e pertanto, essendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2}$ convergente, per ogni $x \in \mathbb{R}$, dal criterio del confronto la serie data converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Inoltre, poiché risulta

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) \geq f_n(\sqrt{n}) = \log 2\, \frac{n}{n^2+1} := L_n$$

e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} L_n = \log 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge, essendo $\dfrac{n}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n}$, non c'è convergenza totale in $\mathbb{R}$.

Tuttavia, se $x \in [0,1]$ risulta $f_n(x) \leq \dfrac{x^2}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2} := L'_n$ e poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la serie data converge totalmente, e quindi anche uniformemente. Pertanto, poiché le $f_n(x)$ sono continue, e quindi integrabili in $[0,1]$, sussiste l'uguaglianza per un noto teorema.

2) Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli, del tipo $y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^s$, con $s = 2$. Posto $z = y^{-1}$ l'equazione diventa

$$z' + \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x} z = \cos x,$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine in z.

Dalla formula che fornisce l'integrale generale si ha

$$z(x) = e^{A(x)} \left[\int \beta(x) e^{-A(x)}\, dx + C \right],$$

con $A(x) = -\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}\,dx = -\log(1+\sin^2 x)$ e $\beta(x) = \cos x$. Pertanto

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\log(1+\sin^2 x)}\left[\int \cos x e^{\log(1+\sin^2 x)}\,dx + C\right] \\ &= \frac{1}{1+\sin^2 x}\left[\int (\cos x + \cos x \sin^2 x)\,dx + C\right] = \frac{\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C}{1+\sin^2 x}, \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$, da cui

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1+\sin^2 x}{\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \dfrac{1}{C} = 1$, da cui $C = 1$, si conclude che la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1+\sin^2 x}{\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + 1}.$$

3) (a) Affinché ω sia chiusa, deve essere

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{f(x)y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = x.$$

Il dominio di ω è $\mathbb{R}^2$, convesso, pertanto ω è anche esatta in $\mathbb{R}^2$.

(b) Detto $F(x,y)$ una primitiva di ω, deve essere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = X = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Y = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Integrando la prima condizione si ricava $F(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2} + \varphi(y)$, e dunque, utilizzando la seconda,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \varphi'(y) = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad \Leftrightarrow \varphi'(y) = 0,$$

cioè $\varphi(y) = c$, e infine $F(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione $F(0,0) = 1$ si conclude che la primitiva cercata è

$$F(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}.$$

(c) Poiché ω è esatta e γ una curva regolare, per un noto teorema si ha che

$$\int_\gamma \omega = F(0,2) - F(\sqrt{3},0) = \sqrt{5} - 2.$$

I appello - 15 Giugno 2009

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Data la seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = n\sqrt{x}\log\left(\frac{2+n^4x^2}{n^4x^2}\right), \quad x > 0,$$

studiarne la convergenza puntuale in $\mathbb{R}^+$ e la convergenza uniforme in $\mathbb{R}^+$ e in $[1,+\infty)$.

Stabilire inoltre se sussiste il passaggio al limite sotto il segno di derivata.

2) Determinare, dopo averne giustificata l'esistenza, i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} + 2x^2 - \frac{y^2}{2},$$

nell'insieme $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \le 4\}$.

3) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_E z e^{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz,$$

dove E è dato dall'intersezione della sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio $\sqrt{3}$ con il cono di equazione $2(x^2+y^2) \le z^2$, contenuta nel semispazio $z \ge 0$.

Svolgimento

1) Per quanto riguarda la convergenza puntuale risulta, per ogni $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n\sqrt{x}\ \log\left(1+\frac{2}{n^4x^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\sqrt{x}\ \frac{\log\left(1+\frac{2}{n^4x^2}\right)}{\frac{2}{n^4x^2}}\frac{2}{n^4x^2} = 0,$$

e dunque $(f_n(x))_n$ converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$ in $\mathbb{R}^+$. Studiamo ora la convergenza uniforme. Osserviamo che risulta, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} f_n(x) \geq f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \log 3,$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| \geq \log 3 > 0,$$

il che implica che non c'è convergenza uniforme in $\mathbb{R}^+$. Per $x \in [1, +\infty)$ risulta invece, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) \leq n\sqrt{x}\ \frac{2}{n^4x^2} = \frac{2}{n^3x^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2}{n^3},$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq1} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} = 0.$$

La successione $(f_n(x))_n$ converge dunque uniformemente in $[1, +\infty)$ ad $f(x)$.

Le funzioni $f_n(x)$ sono derivabili in $\mathbb{R}^+$ e risulta

$$f_n'(x) = \frac{n}{2\sqrt{x}} \log\left(1+\frac{2}{n^4x^2}\right) - \frac{4n}{\sqrt{x}(n^4x^2+2)}.$$

Poiché dunque

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2\sqrt{x}}\frac{\log\left(1+\frac{2}{n^4x^2}\right)}{\frac{2}{n^4x^2}}\frac{2}{n^4x^2} - \frac{4n}{\sqrt{x}(n^4x^2+2)}\right) = 0 = f'(x),$$

per ogni $x > 0$, si conclude che sussiste il passaggio al limite sotto il segno di derivata.

2) f è una funzione continua e dunque, essendo C compatto, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti in C.

Studiamo i punti interni di C. f è derivabile in C° e risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(e^{x^2+y^2}+2) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y(2e^{x^2+y^2}-1) = 0, \end{cases}$$

da cui l'unico punto critico è $(0,0)$. Studiamo la matrice hessiana: risulta

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2}+4x^2e^{x^2+y^2}+4 & 4xye^{x^2+y^2} \\ \\ 4xye^{x^2+y^2} & 2e^{x^2+y^2}+4y^2e^{x^2+y^2}-1 \end{pmatrix}$$

da cui $detHf(0,0) = 6 > 0$. Essendo poi $f''_{xx}(0,0) > 0$, si conclude che $(0,0)$ è punto di minimo relativo per f.

Studiamo ora la frontiera di C. Una parametrizzazione di ∂C è data da

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ \\ y = 2\sin\theta, \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Risulta pertanto, su ∂C, $f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = e^4 - 2 + 10\cos^2\theta$. I punti di massimo e minimo di f su ∂C sono allora i punti di massimo e minimo della funzione $\cos^2\theta$ in $[0, 2\pi]$, ovvero, rispettivamente, $\theta = 0, \pi$ e $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$. I punti di massimo di f su ∂C sono dunque $(\pm 2, 0)$, in cui f vale $e^4 + 8$, quelli di minimo sono $(0, \pm 2)$, in cui f vale $e^4 - 2$. Poiché $f(0,0) = 1$, si conclude che $(0,0)$ è il punto di minimo assoluto per f, mentre $(\pm 2, 0)$ sono punti di massimo assoluti per f in C.

3) Risulta

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2(x^2+y^2) \leq z^2 \leq 3-(x^2+y^2), \ z \geq 0\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{2(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{3-(x^2+y^2)}\}.$$

Passando in coordinate cilindriche si ha

$$E = \{(\rho,\theta,z) : \ \theta \in [0,2\pi], \rho \in [0,1], \ \sqrt{2}\rho \leq z \leq \sqrt{3-\rho^2}\},$$

da cui

$$\iiint_E z e^{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho \int_{\sqrt{2}\rho}^{\sqrt{3-\rho^2}} z e^{\rho^2}\, dz = 3\pi \int_0^1 \rho e^{\rho^2}(1-\rho^2)\, d\rho$$
$$= \frac{3}{2}\pi[e^{\rho^2}(1-\rho^2)]_0^1 + 3\pi \int_0^1 \rho e^{\rho^2}\, d\rho = \frac{3}{2}\pi(e-2).$$

II appello - 1 Luglio 2009

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale in $\mathbb{R}$ della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{\sqrt{n}}{n+x^2}\right).$$

2) Studiare la continuità in $\mathbb{R}^2$ e la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log\big(1+|y|(x^2+y^2)\big)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3) Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = f(y)\log(2+xy)\,dx + x\log(2+xy)\,dy,$$

definita in $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\}$, si chiede di:

(a) determinare una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che ω sia esatta in Q;

(b) in corrispondenza alla f trovata al punto (a), calcolare un potenziale di ω;

(c) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva di equazione $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, orientata positivamente.

Svolgimento

1) Studiamo dapprima la convergenza totale. Posto $a_n(x) = (-1)^n \tan\left(\frac{\sqrt{n}}{n+x^2}\right)$, risulta

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n(x)| = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è divergente, essendo $\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pertanto la serie data non converge totalmente in $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme risulta

$$|R_n(x)| \leq |a_{n+1}(x)| = \tan\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+x^2}\right),$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, trattandosi di una serie a termini di segno alternativamente positivo e negativo, pertanto

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_{n+1}(x)| = \lim_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 0.$$

Si conclude dunque che la serie converge uniformemente, e quindi anche puntualmente, in $\mathbb{R}$.

2) La funzione data è di certo continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, in quanto composizione, somma e prodotto di funzioni continue. In $(0,0)$ dobbiamo studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(1+|y|(x^2+y^2)\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}.$$

Passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\log\left(1+\rho^3|\sin\theta|\right)}{\sqrt[3]{\rho^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\log\left(1+\rho^3|\sin\theta|\right)}{\rho^3|\sin\theta|}\rho^{\frac{7}{3}}|\sin\theta| = 0,$$

e inoltre

$$|f(\rho,\theta)| = \frac{\log\left(1+\rho^3|\sin\theta|\right)}{\sqrt[3]{\rho^2}} \leq \frac{\log\left(1+\rho^3\right)}{\sqrt[3]{\rho^2}} \leq \rho^{\frac{7}{3}} \to 0,$$

per $\rho \to 0$. Pertanto il limite è uniforme rispetto a θ e dunque, essendo $f(0,0) = 0$, f è continua anche in $(0,0)$.

Studiamo ora la derivabilità in $(0,0)$. Risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+|y|y^2)}{y^{\frac{5}{3}}} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+|y|y^2)}{|y|y^2}|y|y^{\frac{1}{3}} = 0,$$

pertanto f è derivabile in $(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Per quanto riguarda la differenziabilità in $(0,0)$, bisogna infine valutare

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y),$$

da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(1+|y|(x^2+y^2)\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{6}}}.$$

Passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\log\left(1+\rho^3|\sin\theta|\right)}{\rho^{\frac{5}{3}}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\log\left(1+\rho^3|\sin\theta|\right)}{\rho^3|\sin\theta|}|\sin\theta|\rho^{\frac{4}{3}} = 0$$

e

$$\frac{\log\left(1+\rho^3|\sin\theta|\right)}{\rho^{\frac{5}{3}}} \le \rho^{\frac{4}{3}} \to 0,$$

se $\rho \to 0$. Pertanto, essendo il limite uniforme rispetto a θ, si conclude che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$, e dunque f è differenziabile in $(0,0)$.

3) (a) L'insieme Q è convesso, pertanto ω è esatta se e solo se è chiusa. Affinché ω sia chiusa, deve essere

$$\frac{\partial X}{\partial y} = f'(y)\log(2+xy) + \frac{xf(y)}{2+xy} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \log(2+xy) + \frac{xy}{2+xy},$$

per cui la funzione cercata è $f(y) = y$ e ω diventa

$$\omega(x, y) = y \log(2 + xy)\, dx + x \log(2 + xy)\, dy.$$

(b) Detto $F(x, y)$ un potenziale di ω, deve essere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = X = y \log(2 + xy), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Y = x \log(2 + xy). \end{cases}$$

Integrando ad esempio la prima equazione si ottiene

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int y \log(2 + xy) + g(y) = xy \log(2 + xy) - \int \frac{xy^2}{2 + xy}\, dx + g(y) \\ &= xy \log(2 + xy) - \int \frac{xy^2}{2 + xy}\, dx + g(y) \\ &= xy \log(2 + xy) - y \int \left(1 - \frac{2}{2 + xy}\right)\, dx + g(y) \\ &= (2 + xy) \log(2 + xy) - xy + g(y), \end{aligned}$$

e dunque, utilizzando la seconda,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x \log(2 + xy) + g'(y) = x \log(2 + xy) \quad \Leftrightarrow g'(y) = 0,$$

cioè $g(y) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Si conclude quindi che, ad esempio,

$$F(x, y) = (2 + xy) \log(2 + xy) - xy$$

è un potenziale di ω.

(c) Poiché ω è esatta in Q e γ è una curva chiusa, con sostegno contenuto in Q, per un noto teorema risulta $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.

III appello - 8 Settembre 2009

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \left(n^2 + \frac{x^2}{n}\right) e^{-\frac{\sqrt{n}}{|x|}}, \ n \geq 1, \ x \neq 0.$$

Verificare inoltre se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^2 \left(n^2 + \frac{x^2}{n}\right) e^{-\frac{\sqrt{n}}{|x|}} \, dx = 0.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{4\sqrt{x}} = \dfrac{e^{x-\sqrt{x}}}{y}, \\ y(1) = \sqrt{2}. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \sqrt{2} y e^{\sqrt{2}x} \, dx \, dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \ |x| \leq y\}$.

Svolgimento

1) Per quanto riguarda la convergenza puntuale, poiché risulta, per ogni $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(n^2 + \frac{x^2}{n}\right) e^{-\frac{\sqrt{n}}{|x|}} = 0,$$

$(f_n(x))_n$ converge puntualmente alla funzione $f(x) \equiv 0$. Studiamo ora la convergenza uniforme. Osserviamo che, ad esempio, $f_n(\sqrt{n}) = (n^2+1)e^{-1}$, da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\neq 0} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{n\to+\infty} f_n(\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} (n^2+1)e^{-1} = +\infty,$$

dunque non c'è convergenza uniforme in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tuttavia, poiché in $[1,2]$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \left(n^2 + \frac{4}{n}\right) e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}} = 0,$$

$(f_n(x))_n$ converge uniformemente a $f(x) \equiv 0$ in $[1,2]$. Pertanto, poiché le $f_n(x)$ sono continue in $[1,2]$, sussiste un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, da cui si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \left(n^2 + \frac{x^2}{n}\right) e^{-\frac{\sqrt{n}}{|x|}}\, dx = \int_1^2 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx = 0.$$

2) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli del tipo $y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^s$, con $\alpha(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{x}}$, $\beta(x) = e^{x-\sqrt{x}}$ e $s = -1$. Con la sostituzione $z = y^2$, da cui $y = \sqrt{z}$ e $y' = \dfrac{z'}{2\sqrt{z}}$ l'equazione diventa

$$z' + \frac{z}{2\sqrt{x}} = 2e^{x-\sqrt{x}},$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine in z.

Dalla formula che fornisce l'integrale generale si ha

$$z(x) = e^{A(x)} \left[\int \tilde{\beta}(x) e^{-A(x)}\, dx + C\right],$$

con $A(x) = -\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = -\sqrt{x}$, $\tilde{\beta}(x) = 2e^{x-\sqrt{x}}$. Risulta dunque

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\sqrt{x}} \left[\int 2e^x \, dx + C \right] \\ &= e^{-\sqrt{x}}(2e^x + C), \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$, da cui

$$y(x) = \sqrt{e^{-\sqrt{x}}(2e^x + C)}.$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(1) = \sqrt{2 + Ce^{-1}} = \sqrt{2}$, si ottiene $C = 0$, per cui si conclude che la soluzione cercata è

$$y(x) = \sqrt{2e^{x-\sqrt{x}}}.$$

3) Passando in coordinate polari risulta

$$D = \left\{ (\rho, \theta) : \; 1 \leq \rho \leq 3, \; \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \right\},$$

da cui

$$\begin{aligned} I &:= \iint_D \sqrt{2} y e^{\sqrt{2}x} \, dx \, dy = \int_1^3 \rho \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{2}\rho \sin\theta e^{\sqrt{2}\rho\cos\theta} \, d\theta \right) d\rho \\ &= \int_1^3 \rho [-e^{\sqrt{2}\rho\cos\theta}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \, d\rho = \int_1^3 \rho(e^\rho - e^{-\rho}) \, d\rho = [\rho(e^\rho + e^{-\rho})]_1^3 - \int_1^3 (e^\rho + e^{-\rho}) \, d\rho \\ &= 3(e^3 + e^{-3}) - e - e^{-1} - [e^\rho - e^{-\rho}]_1^3 = 2e^3 + 4e^{-3} - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

IV appello - 22 Settembre 2009

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n^2+3n}.$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y''' - 4y' = 4e^{2x}.$$

3) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma (2x^2+x)\,ds,$$

dove γ è il tratto di curva di equazione $y = x + \log x$ compreso fra i punti $A = (1,1)$ e $B = (2, 2 + \log 2)$.

Svolgimento

1) Si tratta di una serie di potenze con $a_n = \dfrac{1}{2n^2+3n}$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n^2+3n} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\dfrac{\log(2n^2+3n)}{n}\right) = 1$, per il teorema di Cauchy-Hadamard il raggio di convergenza è 1. Pertanto la serie converge in $]-1,1[$, non converge se $x > 1$ oppure $x < -1$. In $x = 1$ diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2+3n},$$

e dunque converge, essendo $\dfrac{1}{2n^2+3n} \sim \dfrac{1}{n^2}$. In $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2+3n},$$

che converge, per il criterio di Leibnitz. Pertanto la serie converge in $[-1,1]$. In tale intervallo la convergenza è anche totale, dunque uniforme, poiché, se $|x| < 1$, $|f_n(x)| = \dfrac{|x|^n}{2n^2+3n} \le \dfrac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ è convergente.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine 3 a coefficienti costanti. L'equazione omogenea associata è $y''' - 4y' = 0$, il cui polinomio caratteristico, $\lambda^3 - 4\lambda = 0$, ha soluzioni $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. La soluzione dell'equazione omogenea associata sarà dunque

$$y_H(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}, \ \ c_i \in \mathbb{R}, \ \ i = 1,2,3.$$

Essendo $\beta(x) = 4e^{2x}$ del tipo $\beta(x) = P(x)e^{\alpha x}$ con $P(x)$ di grado 0 e $\alpha = 2$ soluzione del polinomio caratteristico di molteplicità 1, una soluzione particolare sarà del tipo $\overline{y}(x) = Axe^{2x}$, $A \in \mathbb{R}$, da cui $\overline{y}'(x) = 2Axe^{2x} + Ae^{2x}$ e $\overline{y}''(x) = 12Ae^{2x} + 8Axe^{2x}$. Sostituendo nell'equazione data si ottiene $A = \dfrac{1}{2}$, da cui $\overline{y}(x) = \dfrac{x}{2}e^{2x}$. L'integrale generale dell'equazione data è dunque

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \frac{x}{2}e^{2x}, \ \ c_i \in \mathbb{R}, \ \ i = 1,2,3.$$

3) γ è una curva ordinaria del tipo $y = f(x)$ con $f(x) = x + \log x$, $x \in [1,2]$, pertanto, essendo $ds = \sqrt{1 + (f'_x)^2} = \frac{1}{x}\sqrt{2x^2+2x+1}$, risulta

$$\int_\gamma (2x^2 + x)\, ds = \int_1^2 (2x^2+x)\frac{\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (4x+2)\sqrt{2x^2+2x+1}\, dx$$
$$= \frac{1}{3}\left[(2x^2+2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{13\sqrt{13} - 5\sqrt{5}}{3}.$$

V appello - 20 Gennaio 2010

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Data la seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2n^2}\right), \ n = 1, 2, \dots,$$

studiarne la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$.

Stabilire inoltre se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^2}{n^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2n^2}\right) \, dx = 0.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{2}{x}\, y = 3y^2 \log x, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D x(1-x)\, dx\, dy,$$

dove D è la parte di piano racchiusa dall'asse x e dalla curva di equazioni parametriche

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 1 - \cos t, \\ y(t) = \sin t(1 + \cos t), \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Svolgimento

1) Poiché risulta, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{n^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2n^2}\right) = 0,$$

la successione $(f_n(x))_n$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme risulta invece, per ogni $n \in \mathbb{N}$, Risulta

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x^2}{n^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2n^2}\right) \right| \geq f_n\left(n^2\right) = 1,$$

e dunque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| > 0$. La successione, pertanto, non converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Tuttavia se $x \in [0,1]$ risulta $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^4}$, da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} = 0.$$

Sussiste dunque la convergenza uniforme in $[0,1]$ e poiché le $f_n(x)$ sono integrabili in $[0,1]$, da un noto teorema vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Si conclude pertanto che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^2}{n^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2n^2}\right) dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx = 0.$$

2) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli del tipo $y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^s$, con $\alpha = -\dfrac{2}{x}$, $\beta(x) = 3\log x$ e $s = 2$. Operando la sostituzione $z = y^{-1}$, l'equazione diventa

$$z' + \frac{2}{x}z = -3\log x,$$

cioè un'equazione lineare in z del primo ordine. Utilizzando la formula

$$z(x) = e^{A(x)} \left(\int e^{-A(x)} \tilde{\beta}(x)\, dx + C \right),$$

che fornisce l'integrale generale, con $A(x) = -\int \frac{2}{x}\,dx = -2\log x$ e $\tilde{\beta}(x) = -3\log x$, si ha

$$\begin{aligned}
z(x) &= e^{-2\log x}\left(\int e^{2\log x}\tilde{\beta}(x)\,dx + C\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\int 3x^2\log x\,dx + C\right)\\
&= \frac{1}{x^2}\left(-x^3\log x + \int x^2\,dx + C\right) = -x\log x + \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2},
\end{aligned}$$

$C \in \mathbb{R}$, da cui

$$y(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 3x^3\log x + 3C}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = \frac{3}{1+3C} = 1$ si ottiene $C = \frac{2}{3}$, da cui la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 3x^3\log x + 2}.$$

3) Utilizzando una delle formule di Gauss-Green risulta

$$I := \iint_D x(1-x)\,dx\,dy = -\int_{+Fr(D)} xy(1-x)\,dx,$$

dove $+Fr(D)$ è data dall'unione tra γ (con l'orientazione opposta) e δ, dove $\delta : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 0, \end{cases}$ $0 \le t \le 2$. Risulta pertanto

$$\begin{aligned}
I &= -\int_{\gamma^-} xy(1-x)\,dx = \int_\gamma xy(1-x)\,dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 t)\sin^2 t\cos t\,dt\\
&= \int_0^\pi \sin^4 t\cos t\,dt = 0.
\end{aligned}$$

VI appello - 8 Febbraio 2010

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Stabilire se esiste il seguente integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x + 1}{\sqrt{x}(x^2+2)}\, dx.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' \cos x - 2y \sin x = 6e^x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\!\!\int_D (x+2y)\, dx\, dy,$$

dove D è la parte di piano contenuta nel semipiano $y \geq 0$, delimitata dalla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2, dall'asse x e dal segmento passante per i punti $(0,2)$ e $(2,0)$.

Svolgimento

1) Si tratta di un integrale generalizzato in quanto l'integrale è in un intervallo non limitato, e inoltre la funzione $f(x) = \dfrac{\cos x + 1}{\sqrt{x}(x^2+2)}$ risulta illimitata in prossimità di 0, in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x + 1}{\sqrt{x}(x^2+2)} = +\infty.$$

Osserviamo che possiamo scrivere

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\cos x + 1}{\sqrt{x}(x^2+2)}\, dx = \int_0^{1} \frac{\cos x + 1}{\sqrt{x}(x^2+2)}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x + 1}{\sqrt{x}(x^2+2)}\, dx := I_1 + I_2.$$

Studiamo separatamente I_1 e I_2. Per quanto riguarda I_1, $f(x)$ ha la proprietà p_1 e risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1,$$

dunque $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, per $x \to 0^+$, ed essendo $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ G-integrabile in $[0,1]$, anche f lo è, per il criterio del confronto asintotico.

Studiamo ora I_2. Osserviamo che $f(x)$ ha la proprietà p_2 e che $|f(x)| \leq \dfrac{2}{x^{\frac{5}{2}}}$, per ogni $x \geq 1$. Essendo $h(x) = \dfrac{2}{x^{\frac{5}{2}}}$ G-integrabile in $[1,+\infty)$, dal criterio del confronto, anche f è G-integrabile in $[1,+\infty)$.

Esistono dunque finiti entrambi gli integrali I_1 e I_2, il che implica che f è G-integrabile in $[0,+\infty)$.

2) Dividendo per $\cos x$ l'equazione diventa

$$y' - 2\,\frac{\sin x}{\cos x} y = \frac{6e^x}{\cos x},$$

e si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.

Utilizzando la formula risolutiva si ha

$$y(x) = e^{A(x)} \left[\int e^{-A(x)} \beta(x)\, dx + C_1 \right],$$

dove $A(x) = \int 2 \, \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -2 \log |\cos x|$, $\beta(x) = \frac{6e^x}{\cos x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Risulta pertanto

$$y(x) = e^{-2\log|\cos x|} \left[\int e^{2\log|\cos x|} \frac{6e^x}{\cos x} \, dx + C_1 \right] = \frac{1}{\cos^2 x} \left[6 \int e^x \cos x \, dx + C_1 \right].$$

Poiché si ha, integrando per parti due volte,

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x \, dx,$$

da cui

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C_2,$$

si conclude che

$$y(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \left[3e^x(\cos x + \sin x) + C \right],$$

dove $C = C_1 + C_2$. Imponendo infine la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ottiene $C = -2$, da cui la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{3e^x(\cos x + \sin x) - 2}{\cos^2 x}.$$

3) L'insieme D è dato dall'unione tra gli insiemi D_1 e D_2, dove

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -2 \le x \le 0, \; 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}\},$$

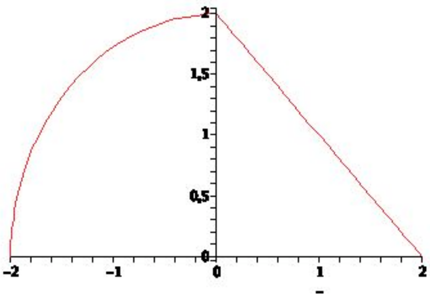
$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 2, \; 0 \le y \le 2 - x\}.$$

Risulta pertanto

$$I := \iint_D (x + 2y) \, dx \, dy = \iint_{D_1} (x + 2y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} (x + 2y) \, dx \, dy := I_1 + I_2.$$

Per quanto riguarda I_1, passando in coordinate polari, una rappresentazione di D_1 è

$$D_1 = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \; \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi, \; 0 \le \rho \le 2 \right\}.$$



Utilizzando un teorema di riduzione risulta dunque

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^2 \rho(\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta)\, d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos\theta + 2\sin\theta)\, d\theta \int_0^2 \rho^2\, d\rho$$
$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 [\sin\theta - 2\cos\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{8}{3}.$$

Per quanto riguarda I_2, D_2 è un dominio normale rispetto all'asse x e dunque, sempre per un teorema di riduzione,

$$I_2 = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+2y)\, dy = \int_0^2 [xy + y^2]_0^{2-x}\, dx = \int_0^2 (4-2x)\, dx = 4.$$

Concludiamo dunque che

$$\int\!\!\int_D (x+2y)\, dx\, dy = \frac{20}{3}.$$

VII appello - 7 Giugno 2010

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale, assoluta e totale della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2n^2+3}\, x^{3n}.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{3}{2}\, y = -\dfrac{e^x}{y}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare, tramite un integrale triplo, il volume del cilindro retto avente per base l'ellisse di centro l'origine e semiassi $a = 1$ e $b = 2$, delimitato dai piani $z = 0$ e $z = 2$.

Svolgimento

1) Ponendo $y = x^3$, la serie data si riduce ad una serie di potenze del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$, con $a_n = \dfrac{n^2}{2n^2+3}$. Essendo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2}{2n^2+3}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, per il criterio di Cauchy-Hadamard il raggio di convergenza è 1, pertanto la serie converge di certo assolutamente (e quindi anche puntualmente) se $|y| = |x^3| < 1$, cioè per $-1 < x < 1$, mentre non converge se $x > 1$ oppure $x < -1$. Se $x = \pm 1$ la serie non converge in quanto in entrambi i casi il termine generale non è infinitesimo, per $n \to +\infty$. Infine si ha convergenza totale in ogni intervallo del tipo $[-\rho, \rho]$, con $0 < \rho < 1$.

2) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli del tipo

$$y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^s,$$

con $\alpha(x) = -\dfrac{3}{2}$, $\beta(x) = -e^x$, $s = -1$. Operando la sostituzione $y = z^{\frac{1}{2}}$, da cui $y' = \dfrac{z'}{2\sqrt{z}}$, l'equazione diventa

$$z' = 3z - 2e^x.$$

Quest'ultima è un'equazione differenziale lineare del primo ordine in z per cui, utilizzando la formula che fornisce l'integrale generale, risulta

$$z(x) = e^{3x}\left[-2\int e^{-2x}\,dx + C\right] = Ce^{3x} + e^x,$$

$C \in \mathbb{R}$, da cui

$$y(x) = \sqrt{Ce^{3x} + e^x}.$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(0) = \sqrt{C+1} = 1$ si ottiene $C = 0$, da cui la soluzione cercata è $y(x) = e^{\frac{x}{2}}$.

3) Bisogna calcolare $Vol(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz$, dove

$$D = \left\{(x, y, z) : \ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, \ 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

Passando in coordinate cilindriche, ossia ponendo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = 2\rho\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

una rappresentazione di D è $D = \{(\rho, \theta, z) : \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq \rho \leq 1, \ 0 \leq z \leq 2\}$.

Tenendo conto del fatto che il determinante dello Jacobiano della trasformazione è 2ρ, risulta dunque

$$Vol(D) = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2\rho\,d\rho = 4\pi.$$

VIII appello - 1 Luglio 2010

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \log(1 + e^{-n\sqrt{x}}), \ n = 1, 2, \dots, \quad x \geq 0.$$

Stabilire inoltre se sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^4 \log(1 + e^{-n\sqrt{x}})\, dx = 0.$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y''' - 2y' = \sin(\sqrt{2}x).$$

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma 2y \log(1 + \sqrt{x})\, ds,$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche $\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^2 t, \\ y(t) = \cos t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}.$

Svolgimento

1) Poiché risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \log(1+e^{-n\sqrt{x}}) = \begin{cases} \log 2, & x = 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

la successione $(f_n(x))_n$ converge puntualmente alla funzione $f(x) = \begin{cases} \log 2, & x = 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$ in $\mathbb{R}_0^+$. Inoltre, poiché $f(x)$ non è una funzione continua, mentre le $f_n(x)$ lo sono, la convergenza non può essere uniforme in $\mathbb{R}_0^+$.

Per ogni $x \in [1,4]$ risulta invece $f_n(x) \leq \log(1+e^{-n})$, e dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[1,4]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \log(1+e^{-n}) = 0.$$

La successione, pertanto, converge uniformemente a $f(x) = 0$ in $[1,4]$.

Infine, poiché le $f_n(x)$ sono integrabili in $[1,4]$, da un noto teorema sussiste il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Si conclude pertanto che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^4 \log(1+e^{-n\sqrt{x}})\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare di ordine tre a coefficienti costanti. L'equazione omogenea associata è $y''' - 2y' = 0$: ad essa è associato il polinomio caratteristico $\lambda^3 - 2\lambda = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dunque

$$y_H(x) = c_1 + c_2 e^{\sqrt{2}x} + c_3 e^{-\sqrt{2}x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Risolviamo ora l'equazione completa. Poiché $\beta(x) = \sin(\sqrt{2}x)$ è del tipo $\beta(x) = k_1 \sin \alpha x + k_2 \cos \alpha x$ con $i\alpha$ che non è soluzione del polinomio caratteristico, una soluzione particolare sarà della forma $y_p = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)$, $A, B \in \mathbb{R}$, da cui

$$
\begin{aligned}
y_p' &= -\sqrt{2}A\sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}x),\\
y_p'' &= -2A\cos(\sqrt{2}x) - 2B\sin(\sqrt{2}x),\\
y_p''' &= 2\sqrt{2}A\sin(\sqrt{2}x) - 2\sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}x).
\end{aligned}
$$

Sostituendo nell'equazione data si ha

$$4\sqrt{2}A\sin(\sqrt{2}x) - 4\sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}x) = \sin(\sqrt{2}x),$$

se e solo se $A = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $B = 0$, da cui $y_p(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x)$. L'integrale generale dell'equazione data sarà dunque

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{\sqrt{2}x} + c_3 e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

3) Risulta

$$
\begin{aligned}
ds &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = [(-2\cos t\sin t)^2 + (\cos^2 t - \sin^2 t)^2]^{\frac{1}{2}}\\
&= [\cos^2(2t) + \sin^2(2t)]^{\frac{1}{2}}\, dt = dt,
\end{aligned}
$$

per cui

$$I := \int_\gamma 2y\log(1+\sqrt{x})\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\sin t\log(1+\cos t)\, dt.$$

Operando la sostituzione $\cos t = u$, da cui $du = -\sin t\, dt$, si ha

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 2u\log(1+u)\, du = [u^2\log|1+u|]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^2}{1+u}\, du = \log 2 - \int_0^1 \left(u - 1 + \frac{1}{u+1}\right) du\\
&= \log 2 - \left[\frac{u^2}{2} - u + \log|u+1|\right]_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

IX appello - 6 Settembre 2010

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = y\log(x+y).$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 2\dfrac{y}{x} = -2\sqrt{y}\log x, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2},$$

dove D è la parte interna del cilindro retto di equazione $x^2+y^2=1$, compresa tra i piani $z=0$ e $z=1$, ed esterna al paraboloide di equazione $z=x^2+y^2$.

Svolgimento

1) Il dominio di f risulta essere l'insieme $D = \{(x, y) : \; y > -x\}$. Inoltre f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in D, e dunque gli eventuali punti di massimo e minimo relativo sono da ricercare fra i punti critici. Risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y}{x+y} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x}{x+y} + \log(x+y) = 0, \end{cases}$$

se e solo se $x = 1$, $y = 0$, pertanto l'unico punto critico è $(1, 0)$.

Calcoliamo la matrice Hessiana. Risulta

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x+y} & \frac{x}{(x+y)^2} \\ \frac{x}{(x+y)^2} & \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y} \end{pmatrix},$$

da cui $det(Hf(x, y)) = -1 < 0$. Si conclude dunque che $(-1, 0)$ è un punto sella. È facile poi vedere che f non ammette né massimo né minimo assoluti: risulta infatti, ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x, 1) = \lim_{x\to+\infty} \log(x+1) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x, -1) = -\lim_{x\to+\infty} \log(x-1) = -\infty.$$

2) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli del tipo $y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^s$, con $s = \dfrac{1}{2}$, $\alpha(x) = -\dfrac{2}{x}$, $\beta(x) = -2\log x$.

Operando la sostituzione $z = y^{1-s} = \sqrt{y}$, da cui $y = z^2$ e $y' = 2zz'$, l'equazione diventa

$$z' - \frac{z}{x} = -\log x,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine in z. Applicando la formula che fornisce l'integrale generale

$$z(x) = e^{A(x)} \left[\int e^{-A(x)} \overline{\beta}(x) \, dx + C \right],$$

con $A(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log x$ e $\overline{\beta}(x) = -\log x$, si ha

$$z(x) = e^{\log x}\left[-\int e^{-\log x}\log x\,dx + C\right] = x\left[-\int \frac{\log x}{x}\,dx + C\right] = x\left[C - \frac{(\log x)^2}{2}\right],$$

con $C \in \mathbb{R}$, da cui

$$y(x) = x^2\left[C - \frac{(\log x)^2}{2}\right]^2.$$

Imponendo infine la condizione iniziale si ha $y(1) = C^2 = 1$, si ha $C = \pm 1$. La soluzione $C = -1$ non è accettabile in quanto in tal caso si avrebbe $z(1) = -1 < 0$, il che è assurdo in quanto $z(x) = \sqrt{y(x)} \geq 0$. La soluzione cercata sarà pertanto

$$y(x) = x^2\left[1 - \frac{(\log x)^2}{2}\right]^2.$$

3) L'insieme D può essere rappresentato come

$$D = \{(x, y, z) :\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Passando in coordinate cilindriche risulta

$$D = \{(\rho, \theta, z) :\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq \rho^2,\ 0 \leq \rho \leq 1\}.$$

Utilizzando un teorema di riduzione risulta dunque

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{1 + x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\,d\rho \int_0^{\rho^2} \frac{1}{\rho^2 + 1}\,dz = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho^3}{\rho^2 + 1}\,d\rho$$
$$= 2\pi \int_0^1 \left(\rho - \frac{\rho}{\rho^2 + 1}\right) d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1 + \rho^2)\right]_0^1 = \pi(1 - \log 2).$$

X appello - 16 Settembre 2010

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale e totale in $\mathbb{R}^+$ e in $[1, +\infty)$ della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin^2\left(\frac{1}{x\sqrt{n}}\right).$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + y\cos x = \cos x \sin x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3) Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = (ye^x + e^y)\, dx + (xe^y + f(x))\, dy,$$

si chiede di:

(a) trovare una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tale che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$;

(b) in corrispondenza alla f trovata al punto (a), calcolare un potenziale di ω;

(c) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva di equazioni parametriche $\gamma : \begin{cases} x(t) = \sin t, \\ y(t) = \sin t \cos t, \end{cases}$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Svolgimento

1) Si tratta di una serie a termini di segno positivo. Per quanto riguarda la convergenza puntuale osserviamo che, per ogni $x > 0$, risulta

$$a_n(x) := \frac{1}{n}\sin^2\left(\frac{1}{x\sqrt{n}}\right) \sim b_n(x) := \frac{1}{n^2x^2},$$

e dunque, essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ convergente, per ogni $x > 0$, la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}^+$. La convergenza, tuttavia, non è totale in $\mathbb{R}^+$ in quanto

$$\sup_{x>0}|a_n(x)| \geq a_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n}(\sin 1)^2$$

e la serie $(\sin 1)^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ è divergente.
Se $x \geq 1$ risulta invece

$$\sup_{x\geq 1}|a_n(x)| \leq \sup_{x\geq 1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x\sqrt{n}}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2},$$

da cui, essendo $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ convergente, la serie convergente totalmente in $[1, +\infty)$.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Utilizzando la formula che fornisce l'integrale generale

$$y(x) = e^{A(x)}\left[\int e^{-A(x)}b(x)\,dx + C\right],\ C \in \mathbb{R},$$

dove $A(x) = -\int \cos x\,dx = -\sin x$ e $b(x) = \cos x \sin x$, si ha

$$y(x) = e^{-\sin x}\left[-\int e^{\sin x}\cos x \sin x\,dx + C\right] = e^{-\sin x}\left[\sin x\ e^{\sin x} - \int \cos x\ e^{\sin x}\,dx + C\right]$$

$$= e^{-\sin x}\left[\sin x\ e^{\sin x} - e^{\sin x} + C\right] = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x},$$

con $C \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = C - 1 = 0$, da cui $C = 1$, la soluzione cercata è

$$y(x) = \sin x - 1 + e^{-\sin x}.$$

3) (a) Poiché $\mathbb{R}^2$ è convesso, ω è esatta se e solo se è chiusa. Deve essere dunque $\dfrac{\partial X}{\partial y} = e^x + e^y = \dfrac{\partial Y}{\partial x} = e^y + f'(x) \Leftrightarrow f'(x) = e^x$, per cui ad esempio $f(x) = e^x$ soddisfa le condizioni richieste.

(b) Detto $F(x, y)$ un potenziale di ω, deve essere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = X = ye^x + e^y, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Y = xe^y + e^x. \end{cases}$$

Integrando la prima espressione si ottiene $F(x, y) = ye^x + xe^y + g(y)$, da cui $\dfrac{\partial F}{\partial y} = e^x + xe^y + g'(y) = xe^y + e^x$ se e solo se $g'(x) = 0$, cioè $g(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Pertanto ad esempio la funzione $F(x, y) = ye^x + xe^y$ è un potenziale di ω.

(c) Essendo $F(x, y) = ye^x + xe^y$ un potenziale di ω e γ una curva regolare, per un noto teorema si ha

$$\int_\gamma \omega = F\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - F(\gamma(0)) = F(1, 0) - F(0, 0) = 1.$$