Prove scritte di Analisi Matematica 1 - A.A. 2015/2016

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Corso di Laura in Ingegneria Informatica ed Elettronica

I appello - 11 Gennaio 2016

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Dato l'insieme

$$A = \left\{ \frac{2n-1}{n},\ n = 1, 2, \dots \right\} \cup [3, 4]$$

si chiede di

(a) determinare $Is(A)$, A', $\overline{A}$, $A'' := (A')'$, $Fr(A)$, A°;

(b) stabilire se A è aperto, chiuso, limitato, compatto, connesso.

2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{e^x - e}{5^{x-1} - 1} - e^{-\frac{1}{|x-1|}} \right).$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x} + \sin x \cos^4 x \right) dx.$$

Svolgimento

1) Poniamo $a_n := \dfrac{2n-1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$.

(a) Proviamo che i punti a_n, $n = 1, 2, \dots$, sono punti isolati.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, è sufficiente scegliere

$$0 < r < \min\{|a_n - a_{n+1}|, |a_n - a_{n-1}|\} = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

per avere $B(a_n, r) \cap A = \{a_n\}$, da cui $Is(A) = \{a_n,\ n = 1, 2, \dots\}$.

Il punto 2 è d'accumulazione per A, poiché la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a 2. Infatti, fissato in maniera arbitraria $\epsilon > 0$, basta prendere $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{1}{\epsilon}$ per avere $|a_n - 2| = \frac{1}{n} < \epsilon$, ovvero $a_n \in B(2, \epsilon)$: pertanto $(B(2, \epsilon) \cap A) \setminus \{2\} \neq \emptyset$. Si conclude dunque che $A' = [3, 4] \cup \{2\}$ e, di conseguenza, $A'' = [3, 4]$. Si ha poi $\overline{A} = A' \cup Is(A) = A \cup \{2\}$ e $A^\circ =]3, 4[$, in quanto solo per i punti dell'intervallo aperto $]3, 4[$ esiste una boccia centrata nel punto e tutta contenuta dentro l'insieme A. Infine i punti 3 e 4 sono di frontiera per A, in quanto lo sono per l'intervallo $[3, 4]$, e anche il punto 2 è di frontiera in quanto non appartiene all'insieme ma è d'accumulazione, dunque ogni boccia centrata in 2 interseca sia A che il suo complementare. Pertanto, tenendo conto del fatto che tutti i punti isolati sono anche di frontiera, si conclude che $\mathrm{Fr}(A) = \{2, 3, 4\} \cup \{a_n,\ n = 1, 2, \dots\}$.

(b) A non aperto, in quanto $A^\circ \neq A$, e non è nemmeno chiuso, poiché $\overline{A} \neq A$: pertanto non può essere compatto. Risulta invece limitato, essendo, ad esempio, $A \subset [1, 4]$. L'insieme A, infine, non è connesso: basta infatti considerare, ad esempio, $B =]0, 2[$, $C =]2, 5[$ per avere

- $(B \cap A) \neq \emptyset$, $\quad (C \cap A) \neq \emptyset$,
- $(B \cap A) \cap (C \cap A) = \emptyset$,
- $(B \cap A) \cup (C \cap A) = A$.

2) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{|x-1|}} = 0,$$

mentre

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{5^{x-1}-1} = e \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \frac{x-1}{5^{x-1}-1} = \frac{e}{\log 5},$$

tenendo presente il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \log a$, $a>0$. Pertanto si conclude che

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{e^x - e}{5^{x-1}-1} - e^{-\frac{1}{|x-1|}} \right) = \frac{e}{\log 5}.$$

3) Osserviamo che

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4\sin x + 3\cos x} + \sin x \cos^4 x \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\sin x + 3\cos x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^4 x \, dx = J - \frac{1}{5}\big[\cos^5 x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = J + \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Per calcolare J operiamo la sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$, da cui $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$: si ha

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\sin x + 3\cos x}\, dx = \int_0^1 \frac{2}{8t - 3t^2 + 3}\, dt = -\frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{(t-3)\left(t+\frac{1}{3}\right)}\, dt \\ &= -\frac{1}{5} \left(\int_0^1 \frac{1}{t-3}\, dt - \int_0^1 \frac{1}{t+\frac{1}{3}}\, dt \right) = -\frac{1}{5} \left[\log \left| \frac{t-3}{t+\frac{1}{3}} \right| \right]_0^1 = \frac{1}{5} \log 6, \end{aligned}$$

da cui infine

$$I = \frac{1}{5}(\log 6 + 1).$$

II appello - 2 Febbraio 2016

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(-\sqrt{x^2+4})\frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}}.$$

2) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2^n}(2x+1)^n.$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{2e^{3x}-e^{2x}+7e^x}{(e^{2x}+9)(e^x-2)}\,dx.$$

Svolgimento

1) Osserviamo che il calcolo diretto fornisce una forma indeterminata. Risulta tuttavia $\lim_{x\to+\infty} \arctan(-\sqrt{x^2+4}) = -\frac{\pi}{2}$ e, razionalizzando il denominatore,

$$L := \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}\frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3}}{7\sqrt{x^2+2}} = \frac{2}{7},$$

tenendo presente il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$. Si conclude dunque che

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(-\sqrt{x^2+4})\frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}} = -\frac{\pi}{7}.$$

2) Si tratta di una serie a termini di segno qualunque. Se $x = -\frac{1}{2}$ la serie diventa a termini identicamente nulli, dunque ovviamente converge.

Se $x \neq -\frac{1}{2}$ studiamo la convergenza assoluta con il criterio del rapporto. Posto $a_n := \frac{n+3}{2^n}(2x+1)^n$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |2x+1| \lim_{n\to+\infty}\frac{n+4}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n+3} = \left|x+\frac{1}{2}\right|,$$

dunque la serie converge assolutamente, e quindi converge, se $\left|x+\frac{1}{2}\right| < 1$, ovvero se $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Se $x > \frac{1}{2}$ la serie è a termini positivi, dunque in questo caso diverge, in quanto diverge assolutamente.

Se $x < -\frac{3}{2}$ la serie è a termini di segno alternativamente positivo e negativo. Poiché risulta in tal caso $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|x+\frac{1}{2}\right| > 1$, per definizione di limite esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n+1}| > |a_n|$, per ogni $n \geq \bar{n}$. La serie è dunque indeterminata, per un criterio di indeterminatezza, essendo $(|a_n|)_n$ definitivamente crescente.

Se $x = \frac{1}{2}$ la serie è a termini positivi e diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+3):$$

essendo $\lim_{n\to+\infty}(n+3) = +\infty$ la serie in questo caso diverge.

Infine se $x = -\frac{3}{2}$ la serie è a termini di segno alterno e diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+3).$$

Poiché $|a_n| = n+3 < n+4 = |a_{n+1}|$, per ogni $n \geq 0$, la serie è indeterminata, essendo $(|a_n|)_n$ crescente, per un criterio di indeterminatezza.

In conclusione la serie data è:

- convergente se $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$;

- divergente se $x \geq \frac{1}{2}$;

- indeterminata se $x \leq -\frac{3}{2}$.

3) Effettuando la sostituzione $e^x = t$, da cui $dt = e^x\, dx$, l'integrale diventa

$$I := \int \frac{2e^{3x} - e^{2x} + 7e^x}{(e^{2x}+9)(e^x-2)}\, dx = \int \frac{2t^2 - t + 7}{(t^2+9)(t-2)}\, dt.$$

Utilizzando ora la formula di Hermite si ha

$$\frac{2t^2 - t + 7}{(t^2+9)(t-2)} = \frac{At+B}{t^2+9} + \frac{C}{t-2}$$

se e solo se

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ -2A + B = -1 \\ -2B + 9C = 7 \end{cases}$$

da cui $A = B = C = 1$. Risulta pertanto

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t+1}{t^2+9}\, dt + \int \frac{1}{t-2}\, dt = \frac{1}{2}\log(t^2+9) + \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{t^2}{9}+1}\, dt + \log|t-2| \\ &= \frac{1}{2}\log(t^2+9) + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{t}{3}\right) + \log|t-2| + C \\ &= \frac{1}{2}\log(e^{2x}+9) + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{e^x}{3}\right) + \log|e^x-2| + C, \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

III appello - 7 Giugno 2016

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{4x-4}\ \arctan(\sqrt{x-1})}{\cos(\sqrt{2x-2}) - e^{x^2-1}}.$$

2) Data la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come:

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{x}{2}-1\right), & x > 2, \\ x^3 - 6, & 0 \le x \le 2,\ x \ne \frac{2}{\sqrt[3]{n}},\ n \in \mathbb{N}, \\ \frac{2}{n}, & x = \frac{2}{\sqrt[3]{n}},\ n \in \mathbb{N}, \\ x^3, & x < 0,\ x \notin \mathbb{Q}, \\ -1, & x < 0,\ x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

si chiede di determinare i punti di continuità di f, classificandone le eventuali discontinuità.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{10}} \frac{\sqrt{x^3-5}}{x}\,dx.$$

Svolgimento

1) Osserviamo che il calcolo diretto fornisce una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{4x-4}\ \arctan(\sqrt{x-1})}{\cos(\sqrt{2x-2})-e^{x^2-1}} = \\
&= 2\lim_{x\to 1^+}(x-1)\frac{\arctan(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}}\frac{1}{\cos(\sqrt{2x-2})-1+1-e^{x^2-1}} \\
&= 2\lim_{x\to 1^+}\frac{\arctan(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}}\frac{1}{2\frac{\cos(\sqrt{2x-2})-1}{2(x-1)}+\frac{1-e^{x^2-1}}{x^2-1}(x+1)} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

tenendo presente i limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

2) Poniamo $a_n := \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$, $n=1,2,\dots$, e $A=\Big\{a_n,\ n=1,2,\dots\Big\}$.

Studiamo il punto $a_1=2$. Risulta

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x\cos\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2 = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^3-6) = f(2),$$

per cui f è continua nel punto 2. Studiamo ora i punti $a_n \in A$, $n=2,3,\dots$. Fissato $n\geq 2$ risulta

$$\lim_{x\to a_n} f(x) = \lim_{x\to \frac{2}{\sqrt[3]{n}}}(x^3-6) = \frac{8}{n}-6,$$

e $\lim_{x\to a_n} f(x) = f(a_n) = \frac{2}{n}$ se e solo se $n=1$. Pertanto tutti i punti a_n, $n\neq 1$, sono punti di discontinuità di prima specie eliminabile per f.

Per quanto riguarda il punto $x=0$, essendo $0\in A'$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f\big|_A(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f\big|_{A^c}(x) = \lim_{x\to 0^+,\ x\notin A}(x^3-6) = -6,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f\big|_{\mathbb{Q}}(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0^-} f\big|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) = \lim_{x\to 0^-, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} x^3 = 0,$$

ovvero non esistono né $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, né $\lim_{x\to 0^+} f(x)$: pertanto 0 è un punto di discontinuità di seconda specie.

Sui punti $x < 0$ $f(x)$ segue una legge di tipo Dirichlet, in quanto

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0,\ x \in \mathbb{Q}, \\ x^3, & x < 0,\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Fissato $\overline{x} < 0$ risulta

$$\lim_{x \to \overline{x}} f\big|_{\mathbb{Q}}(x) = -1 \qquad \lim_{x \to \overline{x}} f\big|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) = \overline{x}^3,$$

e $\overline{x}^3 = -1$ se e solo se $\overline{x} = -1$; si conclude dunque che $\overline{x} = -1$ è di continuità per f, mentre i punti $\overline{x} < 0$, $\overline{x} \neq -1$, sono di discontinuità di seconda specie.

Sui punti $x > 2$ e $0 < x < 2$, $x \neq a_n$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione è ovviamente continua in quanto prodotto e composizione di funzioni continue.

3) L'integrale dato presenta un differenziale binomio del tipo $x^m(ax^p + b)^n$, con $m = -1$, $a = 1$ $b = -5$, $p = 3$, $n = \dfrac{1}{2}$, dove $\dfrac{m+1}{p} = 0 \in \mathbb{Z}$. Si può pertanto effettuare la sostituzione $x^3 - 5 = u^2$, da cui $x = \sqrt[3]{u^2+5}$ e $dx = \dfrac{2}{3}\dfrac{u}{(u^2+5)^{\frac{2}{3}}}\, du$. Si ha dunque

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{10}} \frac{\sqrt{x^3-5}}{x}\, dx = \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{5}} \frac{u^2}{u^2+5}\, du = \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{5}} \left(1 - \frac{1}{\frac{u^2}{5}+1}\right) du \\ &= \frac{2}{3}\left[u - \sqrt{5}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)\right]_0^{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

IV appello - 28 Giugno 2016

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Date le funzioni

$$f(x) = (e^{\sqrt{x^3}} - 1)\sqrt{x^3 + x^2} + 5x^5 \tan\left(\frac{x}{5}\right),$$
$$g(x) = \sin(\sqrt{x^3})\arctan(\sqrt{x}),$$

determinare l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a $g(x)$, per $x \to 0^+$.

2) Studiare la seguente funzione, tracciandone un grafico approssimativo:

$$f(x) = \frac{e^{1-x}}{x^2}.$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin x}{(3 - \cos x)(\cos^2 x + 9)}\, dx.$$

Svolgimento

1) La funzione $f(x)$ è somma di due infinitesimi, per $x \to 0^+$. L'ordine di $(e^{\sqrt{x^3}} - 1)$ rispetto a x è $\frac{3}{2}$, per $x \to 0^+$, per cui l'ordine di $(e^{\sqrt{x^3}} - 1)\sqrt{x^3 + x^2}$ è $\frac{5}{2}$, poiché l'ordine di $\sqrt{x^3 + x^2}$ è ovviamente 1. L'ordine di $5x^5 \tan\left(\frac{x}{5}\right)$ invece è 6, rispetto a x, per $x \to 0^+$. Infine $g(x)$ ha ordine 2 rispetto a x, in quanto $\sin(\sqrt{x^3})$ ha ordine $\frac{3}{2}$, mentre $\arctan(\sqrt{x})$ ha ordine $\frac{1}{2}$. Pertanto, applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi, risulta, per $\alpha = \frac{5}{4}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{[g(x)]^{\frac{5}{4}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{\sqrt{x^3}} - 1)\sqrt{x^3 + x^2}}{[\sin(\sqrt{x^3})\arctan(\sqrt{x})]^{\frac{5}{4}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{5}{2}} \frac{e^{\sqrt{x^3}}-1}{\sqrt{x^3}} \sqrt{x+1}}{\left[\frac{\sin(\sqrt{x^3})}{\sqrt{x^3}} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right]^{\frac{5}{4}} x^{\frac{5}{2}}} = 1,$$

da cui si conclude che l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a $g(x)$, per $x \to 0^+$, è $\frac{5}{4}$.

2) Il dominio della funzione data è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e osserviamo che risulta $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Non ci sono ovviamente intersezioni con gli assi.

Per quanto riguarda gli asintoti, essendo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1-x}}{x^3} = -\infty,$$

l'asse x è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, mentre non ci sono asintoti orizzontali, né obliqui, per $x \to -\infty$. Infine

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$

per cui l'asse y è un asintoto verticale, sia da destra che da sinistra.

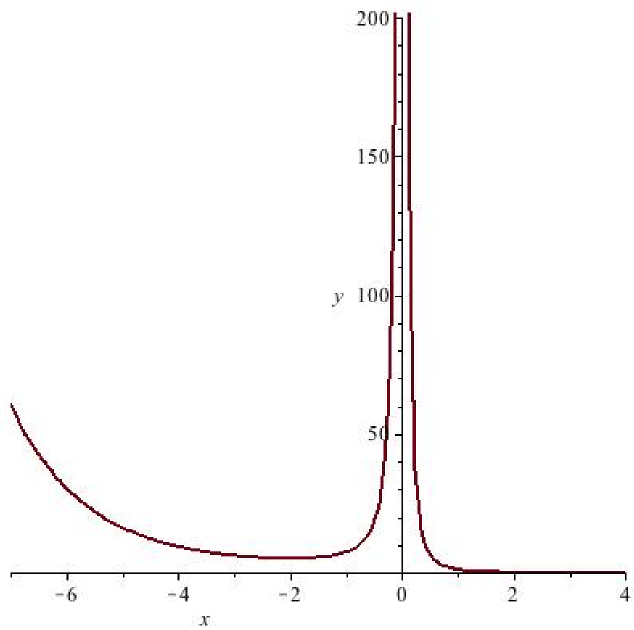
La funzione f è di certo derivabile in D, in quanto composizione e quoziente di funzioni derivabili, e risulta

$$f'(x) = -\frac{2+x}{x^3}e^{1-x}.$$

Risulta $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -2$, $f'(x) > 0$ se $-2 < x < 0$, mentre $f'(x) < 0$ se $x < -2$ oppure $x > 0$, dunque f è crescente in $]-2, 0[$, decrescente in $(-\infty, -2[$ e in $]0, +\infty)$. Il punto -2 è punto di minimo locale per f, mentre f non ammette massimo, né minimo assoluti.

La derivata $f'(x)$ è a sua volta derivabile in D e $f''(x) = \frac{e^{1-x}}{x^4}(x^2 + 4x + 6)$: essendo dunque $f''(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, la funzione data è convessa in $\mathbb{R}_-$ e in $\mathbb{R}_+$.

Il grafico approssimativo della funzione è il seguente:



3) Effettuando la sostituzione $\cos x = t$, da cui $dt = -\sin x\,dx$, l'integrale diventa

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin x}{(3-\cos x)(\cos^2 x + 9)}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{(3-t)(t^2+9)}\,dt.$$

Utilizzando ora la formula di Hermite si ha

$$\frac{t}{(3-t)(t^2+9)} = \frac{A}{3-t} + \frac{Bt+C}{t^2+9}$$

se e solo se

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ 3B - C = 1 \\ 9A + 3C = 0 \end{cases}$$

da cui $A = B = \frac{1}{6}$ e $C = -\frac{1}{2}$. Si ha dunque

$$I = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1}{3-t}\,dt + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{t-3}{t^2+9}\,dt = -\frac{1}{6}\log|3-t|\Big|_0^1 + \frac{1}{12}\log(t^2+9)\Big|_0^1 +$$
$$-\frac{1}{18}\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+9} = -\frac{1}{6}\log 2 + \frac{1}{6}\log 3 + \frac{1}{12}\log 10 - \frac{1}{12}\log 9 - \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{t}{3}\right)\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{12}\log\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

V appello - 12 Luglio 2016

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \arctan(\sqrt{n+2}) \left(1+\frac{1}{4\sqrt{n+2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}}.$$

2) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-4)^n\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\log 4}.$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-1}^{3} \log(1+\sqrt{2t+3})\,dt.$$

Svolgimento

1) Osserviamo che il calcolo diretto ci porta ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia,

$$L := \lim_{n\to+\infty} \arctan(\sqrt{n+2}) \left(1 + \frac{1}{4\sqrt{n+2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \arctan(\sqrt{n+2}) \left[\left(1 + \frac{1}{4\sqrt{n+2}}\right)^{4\sqrt{n+2}}\right]^{\frac{1}{4\sqrt{n+2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})}}.$$

Razionalizzando l'esponente si ha poi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4\sqrt{n+2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{16\sqrt{n+2}}$$

$$= \frac{1}{16} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = \frac{1}{8}.$$

Pertanto, tenendo presente il limite notevole $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ed il fatto che $\lim_{n\to+\infty} \arctan(\sqrt{n+2}) = \frac{\pi}{2}$, si conclude che

$$L = \frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{8}}.$$

2) La serie data è a termini di segno qualunque e si può anche scrivere come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (4-x)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\log 4}.$$

Se $x = 4$ la serie diventa a termini identicamente nulli, dunque ovviamente converge.

Se $x \neq 4$ studiamo la convergenza assoluta tramite il criterio del rapporto. Posto $a_n := (4-x)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\log 4}$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |4-x| \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\log 4} \frac{\sqrt{n+1}+\log 4}{\sqrt{n}}$$

$$= |4-x| \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \frac{\log 4}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \frac{\log 4}{\sqrt{n}}\right)} = |4-x|,$$

dunque la serie converge assolutamente, e quindi converge, se $|x-4|<1$, ovvero se $3<x<5$.

Se $x<3$ la serie è a termini positivi, dunque in questo caso diverge, in quanto diverge assolutamente.

Se $x>5$ la serie è a termini di segno alternativamente positivo e negativo. Poiché risulta in tal caso $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |4-x|>1$, per definizione di limite esiste $\bar{n}\in\mathbb{N}$ tale che $|a_{n+1}|>|a_n|$, per ogni $n\geq\bar{n}$. La serie è dunque indeterminata, per un criterio di indeterminatezza, essendo $(|a_n|)_n$ definitivamente crescente.

Se $x=3$ la serie è a termini positivi e diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\log 4}:$$

essendo $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\log 4}=1\neq 0$, la serie in questo caso diverge.

Infine se $x=5$ la serie è a termini di segno alterno e diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\log 4}.$$

Osserviamo che

$$|a_n|=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\log 4}<\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\log 4}=|a_{n+1}|,$$

per ogni $n\geq 0$: questo infatti è equivalente a

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+2}+\log 4)<\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\log 4),$$

ovvero

$$\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n}\log 4<\sqrt{n^2+2n+1}+\sqrt{n+1}\log 4,$$

che è sempre vero. La serie dunque è indeterminata, essendo $(|a_n|)_n$ crescente, per un criterio di indeterminatezza.

In conclusione la serie data è:

- convergente se $3 < x < 5$;

- divergente se $x \leq 3$;

- indeterminata se $x \geq 5$.

3) Effettuando la sostituzione $u = \sqrt{2t+3}$, da cui $t = \frac{u^2-3}{2}$ e $dt = u\,du$, risulta

$$I := \int_{-1}^{3} \log(1+\sqrt{2t+3})\,dt = \int_{1}^{3} u\log(1+u)\,du.$$

Applicando ora la formula di integrazione per parti si ha

$$I = \left[\frac{u^2}{2}\log(1+u)\right]_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{u^2}{1+u}\,du = \frac{9}{2}\log 4 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\int_1^3 \left(u - 1 + \frac{1}{1+u}\right) du$$
$$= \frac{9}{2}\log 4 - \frac{1}{2}\log 2 - \left[\frac{u^2}{4} - \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\log|1+u|\right]_1^3 = 8\log 2 - 1.$$

VI appello - 9 Settembre 2016

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{x+1}-1}{x^2-1}, & x \leq 0,\ x \neq -1, \\ 0, & x = -1, \\ \dfrac{\sin(|x-1|)}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

2) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x-1)^{4n}(16^n + \log n).$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\tan^2 x + \tan x + 1}{\cos^2 x + 2 + 3\sin^2 x}\, dx.$$

Svolgimento

1) Osserviamo che la funzione data è di certo continua per ogni $x \neq -1, 0$, in quanto somma, composizione e quoziente di funzioni continue. Per quanto riguarda il punto -1 risulta

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2^{x+1}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{2^{x+1}-1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{\log 2}{2},$$

mentre $f(-1) = 0$: il punto -1 è dunque un punto di discontinuità di prima specie eliminabile per f. Si ha poi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2^{x+1}-1}{x^2-1} = -1,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(|x-1|)}{x} = +\infty,$$

da cui 0 è dunque un punto di discontinuità di seconda specie per f.

Per quanto riguarda la derivabilità, la funzione data è derivabile per ogni $x \neq -1, 0, 1$, in quanto somma, composizione e quoziente di funzioni derivabili. Nei punti -1 e 0 non è derivabile, non essendo nemmeno continua. Per quanto riguarda il punto 1 risulta

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x(x-1)} = 1,$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sin(1-x)}{x(x-1)} = -1,$$

per cui la funzione data non è derivabile neanche in 1.

Risulta infine

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{x+1}\log 2(x^2-1) - 2x(2^{x+1}-1)}{(x^2-1)^2}, & x<0,\ x\neq -1, \\ -\dfrac{x\cos(1-x)+\sin(1-x)}{x^2}, & 0<x<1, \\ \dfrac{x\cos(x-1)-\sin(x-1)}{x^2}, & x>1. \end{cases}$$

2) La serie data è a termini di segno positivo e, posto $a_n := (x-1)^{4n}(16^n + \log n)$, osserviamo che per $x = 1$ è a termini nulli, dunque ovviamente converge. Se $x \neq 1$ si può studiare la convergenza con il criterio del rapporto. Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = (x-1)^4 \lim_{n\to+\infty} \frac{16^{n+1}+\log(n+1)}{16^n+\log(n)} = 16(x-1)^4 \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{\log(n+1)}{16^{n+1}}}{1+\frac{\log(n)}{16^n}}$$

$$= 16(x-1)^4 = (2x-2)^4$$

e dunque la serie converge se $|2x-2|<1$, ovvero se $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$, mentre diverge se $x<\frac{1}{2}$ oppure $x>\frac{3}{2}$, dal criterio del rapporto.

Se $x=\frac{3}{2}$ oppure $x=\frac{1}{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{4n}}(16^n+\log n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\log n}{16^n}\right).$$

Essendo in tal caso $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\log n}{16^n}\right)=1\neq 0$ la serie diverge.

In conclusione la serie data è:

- convergente se $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$;

- divergente se $x\leq\frac{1}{2}$ oppure $x\geq\frac{3}{2}$;

3) Effettuando la sostituzione $t=\tan x$, da cui $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, tenendo conto che $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$, risulta

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\tan^2 x+\tan x+1}{\cos^2 x+2+3\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\tan^2 x+\tan x+1}{5-2\cos^2 x}\,dx=\int_0^1\frac{5t^2+t+1}{5t^2+3}\,dt\\
&=\int_0^1\left(1+\frac{t-2}{5t^2+3}\right)dt=1+\frac{1}{10}\int_0^1\frac{10t}{5t^2+3}\,dt-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dt}{\frac{5}{3}t^2+1}\\
&=1+\frac{1}{10}\log(5t^2+3)\Big|_0^1-\frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5}{3}}t\right)\Big|_0^1\\
&=1+\frac{1}{10}\log\left(\frac{8}{3}\right)-\frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right).
\end{aligned}$$

Prove scritte di Analisi Matematica 1 - A.A. 2016/2017

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Corso di Laura in Ingegneria Informatica ed Elettronica

I appello - 9 Gennaio 2017

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\cos(\sqrt{2x-2})-e^{x-1}}{\log x}+\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right).$$

2) Dato l'insieme

$$A=[-1,0]\cup\left\{\frac{1}{2n^2},\ n=1,2,\dots\right\}$$

si chiede di

(a) determinare $Is(A)$, A', $\overline{A}$, $A'':=(A')'$, $Fr(A)$, A°;

(b) stabilire se A è aperto, chiuso, limitato, compatto, connesso;

(c) determinare $\inf A$ e $\sup A$.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\log\left(\frac{1}{2}\right)}^{0}\frac{e^{2x}-9e^x}{e^{3x}-2e^{2x}+3e^x-6}\,dx.$$

Svolgimento

1) Osserviamo che il calcolo diretto del primo addendo conduce ad una forma indeterminata, mentre ovviamente

$$\lim_{x\to 1^+} \arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Tenendo presenti i limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, risulta tuttavia

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\cos(\sqrt{2x-2}) - e^{x-1}}{\log x} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\cos(\sqrt{2x-2}) - 1}{\log x} + \frac{1-e^{x-1}}{\log x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \left(2\frac{\cos(\sqrt{2x-2}) - 1}{2x-2} \frac{x-1}{\log(1+(x-1))} + \frac{1-e^{x-1}}{x-1} \frac{x-1}{\log(1+(x-1))}\right) = -2,$$

da cui si conclude che

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\cos(\sqrt{2x-2}) - e^{x-1}}{\log x} + \arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 2.$$

2) Poniamo $a_n := \frac{1}{2n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$.

(a) Risulta $Is(A) = \{a_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$. Fissato infatti $n \in \mathbb{N}$, è sufficiente scegliere

$$0 < r < \min\{|a_n - a_{n+1}|, |a_n - a_{n-1}|\} = a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2}$$

per avere $B(a_n, r) \cap A = \{a_n\}$.

Risulta poi $A' = [-1, 0]$ (tenendo anche conto che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a 0, per $n \to +\infty$) e, di conseguenza, $A'' = [-1, 0]$.

Si ha poi $\overline{A} = A' \cup Is(A) = A$ e $A^\circ =]-1, 0[$, in quanto solo per i punti dell'intervallo aperto $]-1, 0[$ esiste una boccia centrata nel punto e tutta contenuta dentro l'insieme A.

Infine, tenendo conto del fatto che tutti i punti isolati sono anche di frontiera e che i punti -1 e 0 sono di frontiera per $[-1,0]$, si conclude che $\mathrm{Fr}(A) = \{-1,0\} \cup \{a_n,\ n = 1,2,\dots\}$.

(b) L'insieme A è chiuso, in quanto $\overline{A} = A$, pertanto ovviamente non è aperto. A è invece limitato, essendo ad esempio $A \subset \left[-1, \frac{1}{2}\right]$, e dunque è compatto. L'insieme, infine, non è connesso: basta infatti considerare, ad esempio, $B = \left]-1, \frac{1}{4}\right[$, $C = \left]\frac{1}{4}, 1\right[$ per avere

- $(B \cap A) \neq \emptyset, \quad (C \cap A) \neq \emptyset,$
- $(B \cap A) \cap (C \cap A) = \emptyset,$
- $(B \cap A) \cup (C \cap A) = A.$

3) Operando la sostituzione $t = e^x$, da cui $dt = e^x\,dx$, si ha

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_{\log\left(\frac{1}{2}\right)}^{0} \frac{e^{2x} - 9e^x}{e^{3x} - 2e^{2x} + 3e^x - 6}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t-9}{t^3 - 2t^2 + 3t - 6}\,dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t-9}{t^2(t-2) + 3(t-2)}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t-9}{(t^2+3)(t-2)}\,dt.
\end{aligned}
$$

Utilizzando la formula di Hermite risulta

$$
\frac{t-9}{(t^2+3)(t-2)} = \frac{At+B}{t^2+3} + \frac{C}{t-2} = \frac{At^2 - 2At + Bt - 2B + Ct^2 + 3C}{(t^2+3)(t-2)}
$$

se e solo se

$$
\begin{cases}
A + C = 0 \\
-2A + B = 1 \\
-2B + 3C = -9
\end{cases}
$$

da cui $A = 1$, $B = 3$, $C = -1$. Pertanto

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t+3}{t^2+3}\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t-2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\log(t^2+3)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t+3}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt - [\log|t-2|]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\log 4 - \frac{1}{2}\log\left(\frac{13}{4}\right) + \sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3}\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + \log 3 - \frac{1}{2}\log 13 + \log 2.$$

II appello - 6 Febbraio 2017

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^3+2}+1}{\sqrt{x^3+2}}\right)^{(x^3+2)\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-2}\right)}.$$

2) (a) Sviluppare in serie di McLaurin fino all'ordine 2 le funzioni

$$f(x)=\log(1+\sin(2x)),\quad g(x)=\sqrt[3]{1+4x^2},$$

dopo averne determinato il campo di sviluppabilità.

(b) *(Facoltativo)* Utilizzando il punto (a), calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to0}\frac{\big(\log(1+\sin(2x))\big)^2}{\sqrt[3]{1+4x^2}-1}.$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\frac{1}{\sin^2 x}\log\left(1+\frac{1}{\tan^2 x}\right)dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$\begin{aligned} L := \lim_{x\to+\infty} & \left(\frac{\sqrt{x^3+2}+1}{\sqrt{x^3+2}}\right)^{(x^3+2)\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-2}\right)} \\ = \lim_{x\to+\infty} & \left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^3+2}}\right)^{\sqrt{x^3+2}}\right]^{\sqrt{x^3+2}\frac{x^3+1-(x^3-2)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-2}}} \\ = \lim_{x\to+\infty} & \left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^3+2}}\right)^{\sqrt{x^3+2}}\right]^{3\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^3}}}} = e^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

tenendo presente il limite notevole $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

2) (a) Per quanto riguarda $f(x)$, $\sin x$ è sviluppabile in serie di McLaurin per ogni $x \in \mathbb{R}$ mentre, per quanto riguarda il logaritmo, deve essere $-1 < \sin(2x) \leq 1$, ovvero $2x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, da cui f è sviluppabile in serie di McLaurin per ogni $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ricordando che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots, \quad -1 < x \leq 1,$$

si conclude che

$$f(x) = \sin(2x) - \frac{\sin^2(2x)}{2} + o(\sin^2(2x)) = 2x - 2x^2 + o(x^2), \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo poi che si può scrivere $g(x) = (1+4x^2)^{\frac{1}{3}}$ e ricordando che

$$(1+x)^\alpha = 1 + \begin{pmatrix}\alpha \\ 1\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}\alpha \\ 2\end{pmatrix} x^2 + \ldots, \quad |x| < 1,$$

$g(x)$ è sviluppabile in serie di McLaurin se $|4x^2| < 1$, ovvero se $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ e

$$g(x) = 1 + \frac{4}{3}x^2 + o(x^2) \quad , -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

(b) Utilizzando gli sviluppi ottenuti al punto (a) ed il principio di sostituzione degli infinitesimi, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\big(\log(1+\sin(2x))\big)^2}{\sqrt[3]{1+4x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\big(2x - 2x^2 + o(x^2)\big)^2}{\frac{4}{3}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{\frac{4}{3}x^2} = 3.$$

3) Ponendo, ad esempio, $t = \tan x$, da cui $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, e utilizzando poi il procedimento di integrazione per parti, l'integrale diventa

$$\begin{aligned} I &:= \int \frac{1}{\sin^2 x} \log\left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) dx = \int \frac{1}{t^2} \log\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= -\frac{1}{t} \log\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) - 2\int \frac{1}{t^2(1+t^2)}\, dt. \end{aligned}$$

Per calcolare $J := \int \frac{1}{t^2(1+t^2)}\, dt$ si può utilizzare la formula di Hermite, ponendo

$$\frac{1}{t^2(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} = \frac{At + At^3 + B + Bt^2 + Ct^3 + Dt^2}{t^2(1+t^2)}$$

da cui $A = C = 0$, $B = 1$ e $D = -1$. Risulta pertanto

$$J = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{t} - \arctan t + C,$$

$C \in \mathbb{R}$, da cui infine

$$I = -\frac{1}{\tan x} \log\left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) + \frac{2}{\tan x} + 2x + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

III appello - 17 Febbraio 2017

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^3}\left(3^{\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1}-3\right)-x\right].$$

2) Studiare, al variare di $x\in\mathbb{R}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{2x}-1)^n\log\left(2+\frac{2}{n^3}\right).$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int\sqrt{3e^{3x}+2}\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$L := \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^3}\left(3^{\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1}-3\right)-x\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[3\sqrt{x}(3^{\frac{2}{\sqrt{x+1}}}-1)-1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[6\,\frac{3^{\frac{2}{\sqrt{x+1}}}-1}{\frac{2}{\sqrt{x+1}}}\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right] = +\infty,$$

dal momento che $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ e

$$\lim_{x\to+\infty}\left[6\,\frac{3^{\frac{2}{\sqrt{x+1}}}-1}{\frac{2}{\sqrt{x+1}}}\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right] = 6\log 3 - 1 > 0,$$

utilizzando il limite notevole $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x} = \log 3$.

2) Si tratta di una serie a termini di segno qualunque.

Posto $a_n := (e^{2x}-1)^n \log\left(2+\frac{2}{n^3}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, se $x = 0$ diventa $a_n \equiv 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque la serie ovviamente converge. Se $x \neq 0$ studiamo la convergenza assoluta, utilizzando il criterio del rapporto: essendo

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |e^{2x}-1| \lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(2+\frac{2}{(n+1)^3}\right)}{\log\left(2+\frac{2}{n^3}\right)} = |e^{2x}-1|,$$

la serie converge assolutamente, e dunque converge, se $|e^{2x}-1| < 1$: essendo $e^{2x} > 0$ per ogni x, tale disuguaglianza è verificata se $e^{2x} < 2$, ovvero se $x < \frac{\log 2}{2} = \log\sqrt{2}$.

Se $x > \log\sqrt{2}$ la serie è a termini di segno positivo, dunque diverge in quanto diverge assolutamente.

Se $x = \log\sqrt{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(2+\frac{2}{n^3}\right),$$

che diverge, essendo a termini di segno positivo e dato che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \log\left(2+\frac{2}{n^3}\right) = \log 2 \neq 0$.

In conclusione la serie data converge se $x < \log\sqrt{2}$, diverge se $x \geq \log\sqrt{2}$.

3) Effettuando la sostituzione $u = \sqrt{3e^{3x}+2}$, da cui $x = \frac{1}{3}\log\left(\frac{u^2-2}{3}\right)$ e $dx = \frac{2u}{3(u^2-2)}\,du$, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
I &:= \int \sqrt{3e^{3x}+2}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{u^2}{u^2-1}\,du = \frac{2}{3}\int\left(1+\frac{2}{u^2-2}\right)du \\
&= \frac{2}{3}u + \frac{4}{3}\int \frac{du}{(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})}\,du = \frac{2}{3}u + \frac{\sqrt{2}}{3}\int\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)du \\
&= \frac{2}{3}u + \frac{\sqrt{2}}{3}\log\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{2}{3}\sqrt{3e^{3x}+2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\log\left|\frac{\sqrt{3e^{3x}+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3e^{3x}+2}+\sqrt{2}}\right| + C,
\end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

IV appello - 5 Giugno 2017

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+3x^3+2\log x}{x^4}\right)^{3x^{\frac{3}{2}}\tan(1/\sqrt{x})}.$$

2) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^2[\log(x^2)+1],$$

tracciandone un grafico approssimativo.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{x+2}}\right)\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto del limite dato porta ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$\begin{aligned}L &:= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+3x^3+2\log x}{x^4}\right)^{3x^{\frac{3}{2}}\tan(1/\sqrt{x})} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^4}{3x^3+2\log x}}\right)^{\frac{x^4}{3x^3+2\log x}}\right]^{3x^{\frac{3}{2}}\tan(1/\sqrt{x})\frac{3x^3+2\log x}{x^4}}.\end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} 3x^{\frac{3}{2}}\tan(1/\sqrt{x})\frac{3x^3+2\log x}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} 3x^{\frac{3}{2}}\frac{\tan(1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}}\frac{3x^3+2\log x}{\sqrt{x}\,x^4} \\ &= \lim_{x\to+\infty} 3\frac{\tan(1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}}\frac{3x^3+2\log x}{x^3} = 9,\end{aligned}$$

tenendo presente che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ ed il fatto che $\log x$ sia un infinito di ordine inferiore a qualunque potenza di x, per $x \to +\infty$. Tenendo conto infine del limite notevole $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, si conclude che $L = e^9$.

2) La funzione data è ben definita per ogni $x \neq 0$, per cui il dominio è $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Osserviamo che la funzione f è pari, nel dominio, in quanto $f(-x) = f(x)$, per ogni $x \neq 0$: possiamo pertanto, senza restrizione di generalità, studiare la funzione per $x > 0$ ed estendere poi lo studio per simmetria a tutto il dominio. Sia dunque $x > 0$ e osserviamo che, in questo caso, possiamo scrivere

$$f(x) = x^2(2\log x + 1).$$

Per quanto riguarda la positività, si ha $f(x) > 0$ se e solo se $2\log x + 1 > 0$, ovvero se $x > e^{-\frac{1}{2}}$, mentre $f(x) < 0$ se $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$. Il grafico di f interseca dunque l'asse delle ascisse in $x = e^{-\frac{1}{2}}$, mentre ovviamente non ci sono intersezioni con l'asse delle ordinate.

Studiamo gli eventuali asintoti. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(2\log x + 1) = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x(2\log x + 1) = +\infty,$$

non ci sono asintoti orizzontali, né obliqui, per $x \to +\infty$. Osservando che $\log x$ è un infinito di ordine inferiore a qualunque potenza di $\frac{1}{x}$, per $x \to 0^+$, risulta poi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2(2\log x + 1) = 0,$$

da cui non ci sono asintoti verticali e la funzione data è estendibile con continuità anche in 0.

La funzione $f(x)$ è continua e derivabile in $D(f)$ e risulta

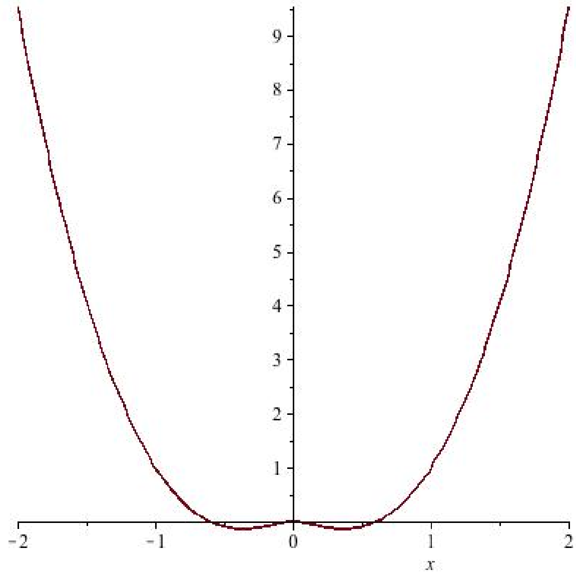
$$f'(x) = 4x(\log x + 1) :$$

essendo, per $x > 0$, $f'(x) > 0$ se e solo se $\log x+1 > 0$, ovvero se $x > e^{-1}$, nella semiretta $\mathbb{R}^+$ la funzione risulta decrescente in $]0, e^{-1}[$, crescente in $]e^{-1}, +\infty)$. Il punto e^{-1} è di minimo assoluto, mentre ovviamente non ci sono punti di massimo, nemmeno relativo. $f'(x)$ è a sua volta derivabile in $D(f)$ e si ha

$$f''(x) = 4(\log x + 2),$$

per cui $f''(x) > 0$ se e solo se $\log x + 2 > 0$, cioè per $x > e^{-2}$. La funzione $f(x)$ è dunque concava in $]0, e^{-2}[$, convessa in $]e^{-2}, +\infty)$ ed il punto e^{-2} è un punto di flesso.

Tenendo conto della parità della funzione si ottiene il seguente grafico approssimativo:



3) Operando il procedimento di integrazione per parti risulta

$$I := \int \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{x+2}}\right) dx = x\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{x+2}}\right) + \int \frac{x}{(x+6)\sqrt{x+2}}\, dx.$$

Risolviamo ora l'integrale

$$J := \int \frac{x}{(x+6)\sqrt{x+2}}\, dx.$$

Operando la sostituzione $u = \sqrt{x+2}$, da cui $x = u^2 - 2$ e $dx = 2u\,du$, si ottiene

$$\begin{aligned} J &= 2\int \frac{u^2-2}{u^2+4}\, du = 2\int \left(1 - \frac{6}{u^2+4}\right) du \\ &= 2u - 3\int \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}\, du = 2u - 6\arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C, \end{aligned}$$

$C \in \mathbb{R}$. Concludiamo pertanto che

$$I = x\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{x+2}}\right) + 2\sqrt{x+2} - 6\arctan\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right) + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$.

V appello - 3 Luglio 2017

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(\sqrt{x^3}))}{\arctan\left(\dfrac{x^3}{x+1}\right)}.$$

2) Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-2}-1}{x-2} + 1, & x > 2, \\ 2, & x = 2, \\ \sin(|x+1|), & x < 2. \end{cases}$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^\pi \left(\frac{\cos(2x)}{\cos^2 x - 4} \sin x + \sin(2x) \right) dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto del limite dato porta ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$
\begin{aligned}
L &:= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(\sqrt{x^3}))}{\arctan\left(\dfrac{x^3}{x+1}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+(\cos(\sqrt{x^3})-1))}{\cos(\sqrt{x^3})-1} \frac{\cos(\sqrt{x^3})-1}{x^3} \frac{\frac{x^3}{x+1}}{\arctan\left(\dfrac{x^3}{x+1}\right)}(x+1) = -\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

tenendo conto dei limiti notevoli $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$.

2) La funzione data è certamente continua se $x \neq 2$, in quanto composizione, somma e quoziente di funzioni continue. Nel punto 2 invece si ha

$$
\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{e^{x-2}-1}{x-2}+1\right) = 2 = f(2),
$$

mentre

$$
\lim_{x\to 2^-} \sin(|x+1|) = \sin(3) :
$$

essendo ovviamente $\sin(3) \neq 2$, $x = 2$ è un punto di discontinuità di prima specie non eliminabile per f.

Per quanto riguarda la derivabilità, la funzione è derivabile per ogni $x \neq 2, -1$, in quanto composizione, somma e quoziente di funzioni derivabili. Nel punto 2 non è derivabile in quanto non è continua. Resta da studiare $x = -1$: poiché

$$
\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = 1,
$$

mentre

$$
\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\sin(-x-1)}{x+1} = -\lim_{x\to -1^+} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = -1,
$$

la funzione non è derivabile nemmeno in $x = -1$.

Si ha infine

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{x-2} - 3e^{x-2} + 1}{(x-2)^2}, & x > 2, \\ \cos(x+1), & -1 < x < 2, \\ -\cos(-x-1) = -\cos(x+1), & x < -1. \end{cases}$$

3) Risulta ovviamente

$$I := \int_0^\pi \left(\frac{\cos(2x)}{\cos^2 x - 4} \sin x + \sin(2x) \right) dx = \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{\cos^2 x - 4} \sin x \, dx + \int_0^\pi \sin(2x) \, dx$$

e si può osservare che il secondo integrale è immediato:

$$\int_0^\pi \sin(2x) \, dx = \int_0^\pi 2 \sin(x) \cos x \, dx = [\sin^2 x]_0^\pi = 0.$$

Per quanto riguarda il primo integrale, operando la sostituzione $\cos x = t$, da cui $-\sin x \, dx = dt$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{\cos^2 x - 4} \sin x \, dx &= \int_0^\pi \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - 4} \sin x \, dx \\ &= -\int_1^{-1} \frac{2t^2 - 1}{t^2 - 4} \, dt = \int_{-1}^1 \frac{2t^2 - 1}{t^2 - 4} \, dt. \end{aligned}$$

Dividendo $2t^2 - 1$ per $t^2 - 4$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{2t^2 - 1}{t^2 - 4} \, dt &= \int_{-1}^1 \left(2 + \frac{7}{t^2 - 4} \right) dt \\ &= [2t]_{-1}^1 + \frac{7}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = 4 + \frac{7}{4} \left[\log \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \right]_{-1}^1 \\ &= 4 + \frac{7}{4} \left[\log \left(\frac{1}{3} \right) - \log 3 \right] = 4 - \frac{7}{2} \log 3. \end{aligned}$$

VI appello - 14 Luglio 2017

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Date le funzioni

$$f(x) = \arctan(x^2 + 3x^3) - x \sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + x(1 - \cos(2x)),$$

$$g(x) = 2^{x^3+x^4} - 1,$$

dopo aver provato che sono entrambe infinitesime, per $x \to 0^+$, determinare l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a $g(x)$, per $x \to 0^+$.

2) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^n \frac{2^{-n}}{\sqrt{n} + 1}.$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{2^t + 1}{4^t + 3}\, dt.$$

Svolgimento

1) Osserviamo che entrambe le funzioni sono infinitesime, per $x \to 0^+$, in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\arctan(x^2 + 3x^3) - x \sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + x(1 - \cos(2x))\right] = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} [2^{x^3+x^4} - 1] = 0.$$

Per quanto riguarda l'ordine, la funzione $f(x)$ è somma di tre infinitesimi, per $x \to 0^+$. L'infinitesimo $\arctan(x^2+3x^3)$ ha ordine 2 rispetto a x, poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^2+3x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^2+3x^3)}{x^2+3x^3}\frac{x^2+3x^3}{x^2} = 1,$$

$-x\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$ ha ordine $\frac{3}{2}$ rispetto a x, in quanto

$$\lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{x\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{x^{\frac{3}{2}}}\right] = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}} = -\frac{1}{2},$$

mentre $x(1-\cos(2x))$ ha ordine 3, essendo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-\cos(2x))}{x^3} = 4\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(2x)}{4x^2} = 2.$$

Pertanto l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a x è $\frac{3}{2}$, per $x \to 0^+$. L'ordine di $g(x)$ è invece 3, in quanto

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{x^3+x^4}-1}{x^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2^{x^3+x^4}-1}{x^3+x^4}\frac{x^3+x^4}{x^3} = \log 2.$$

Pertanto l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a $g(x)$ è $\frac{1}{2}$, per $x \to 0^+$: infatti, per il principio di sostituzione degli infinitesimi,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{|f(x)|}{|g(x)|^{\frac{1}{2}}} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{(2^{x^3+x^4}-1)^{\frac{1}{2}}}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\frac{\sqrt{x^3}}{2\sqrt{x^3+x^4}}\sqrt{\frac{x^3+x^4}{2^{x^3+x^4}-1}} = \frac{1}{2\sqrt{\log 2}}.\end{aligned}$$

2) La serie data è a termini di segno qualunque. In particolare, posto $a_n := \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^n \frac{2^{-n}}{\sqrt{n+1}}$, osserviamo che $a_n \geq 0$ se $\frac{x^2-1}{x^2} \geq 0$, ovvero se $x \geq 1$ oppure $x \leq -1$: la serie dunque è a termini di segno positivo $x > 1$ oppure $x < -1$, a segno alterno se $-1 < x < 1$, $x \neq 0$, mentre per $x = \pm 1$ è a termini nulli, dunque ovviamente converge. Se $x \neq 0, \pm 1$ si può studiare la convergenza assoluta con il criterio del rapporto. Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x^2-1}{2x^2} \right|^{n+1} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}+1} \left| \frac{2x^2}{x^2-1} \right|^n = \left| \frac{x^2-1}{2x^2} \right|$$

e dunque la serie converge, dal criterio del rapporto, se $\left| \frac{x^2-1}{2x^2} \right| < 1$, ovvero se $-2x^2 < x^2 - 1 < 2x^2$: la seconda disequazione è verificata per ogni x, mentre la prima è verificata se $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ oppure $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pertanto la serie converge assolutamente, e dunque converge, se $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ oppure $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Se $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x \neq 0$, la serie è a segni alterni ed è indeterminata, per un criterio di indeterminatezza: per quanto visto prima, infatti, $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ e dunque, per definizione di limite, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \geq \bar{n}$, $|a_{n+1}| > |a_n|$, ovvero la successione $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente crescente.

Se $x = \pm 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+1},$$

ovvero a termini di segno alterno: essendo $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ e $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}+1} > \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = |a_{n+1}|$, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, per il criterio di Leibnitz la serie converge.

In conclusione la serie data è:

- convergente se $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ oppure $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$;

- indeterminata se $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x \neq 0$.

3) Effettuando la sostituzione $x = 2^t$, da cui $t = \log_2 x$ e $dt = \frac{dx}{x \log 2}$, l'integrale diventa

$$I := \int \frac{2^t + 1}{4^t + 3}\, dt = \frac{1}{\log 2} \int \frac{x+1}{x(x^2+3)}\, dx.$$

Utilizzando la formula di Hermite si ha

$$\frac{x+1}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3} = \frac{(A+B)x^2+Cx+3A}{x^2+3}$$

da cui

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \\ C=1 \\ \\ 3A=1 \end{cases}$$

ovvero $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=1$. Si ha pertanto

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\log 2}\left[\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1-\frac{x}{3}}{x^2+3}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\log 2}\left[\frac{1}{3}\log x + \int \frac{dx}{x^2+3} - \frac{1}{6}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\log 2}\left[\frac{1}{3}\log x + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{6}\log(x^2+3)\right] + C, \end{aligned}$$

da cui infine

$$I = \frac{1}{\log 2}\left[\frac{1}{3}\log(2^t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2^t}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{6}\log(4^t+3)\right] + C,$$

$C \in \mathbb{R}$.

VII appello - 7 Settembre 2017

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x^2)} - 2 + \cos(2x^2 + x)}{x^2 + 2x^3}.$$

2) Data la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2n-1}{n}, & x = \dfrac{1}{n^2},\ n = 1, 2, \dots, \\ 2, & x < 1,\ x \neq \dfrac{1}{n^2},\ n = 1, 2, \dots, \\ x^4, & x > 1,\ x \in \mathbb{Q}, \\ x^3, & x > 1,\ x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

determinare i punti di continuità di f, classificandone le eventuali discontinuità.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right) dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto del limite dato porta ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$\begin{aligned} L := \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x^2)} - 2 + \cos(2x^2 + x)}{x^2 + 2x^3} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(x^2)} - 1 - (1 - \cos(2x^2 + x))}{x^2 + 2x^3} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{e^{\sin(x^2)} - 1}{\sin(x^2)} \frac{\sin(x^2)}{x^2} x^2 - \frac{1 - \cos(2x^2 + x)}{(2x^2 + x)^2} (2x^2 + x)^2 \right] \frac{1}{x^2 + 2x^3} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{e^{\sin(x^2)} - 1}{\sin(x^2)} \frac{\sin(x^2)}{x^2} - \frac{1 - \cos(2x^2 + x)}{(2x^2 + x)^2} (2x + 1)^2 \right] \frac{x^2}{x^2 + 2x^3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

tenendo conto dei limiti notevoli $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

2) Poniamo $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$ e $A = \Big\{a_n,\ n = 1, 2, \dots\Big\}$. Osserviamo subito che in tutti i punti $x < 1$, $x \notin A$ e $x \neq 0$ la funzione è ovviamente continua essendo costante.

Studiamo ora i punti $a_n \in A$. Per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, si ha

$$\lim_{x \to a_n} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{n^2}} f(x) = 2,$$

mentre $f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{2n-1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n}$: poichè ovviamente $2 \neq 2 - \dfrac{1}{n}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, i punti a_n, $n > 1$, sono punti di discontinuità di prima specie eliminabile per f.

Per quanto riguarda il punto 1 risulta invece

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2,$$

mentre

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+, x \in \mathbb{Q}} f(x) = \lim_{x \to 1^+, x \in \mathbb{Q}} x^4 = 1 = \lim_{x \to 1^+, x \notin \mathbb{Q}} f(x) = \lim_{x \to 1^+, x \notin \mathbb{Q}} x^3,$$

per cui il punto 1 è di discontinuità di prima specie non eliminabile per f.

Per quanto riguarda il punto $x = 0$, essendo $0 \in A'$, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f\Big|_A(x) = \lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n-1}{n} = 2,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f\Big|_{A^c}(x) = 2 = f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x),$$

da cui esiste $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 = f(0)$: f è dunque continua in $x = 0$.

Nei punti $x > 1$, $f(x)$ segue una legge di tipo Dirichlet, in quanto

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x > 1,\ x \in \mathbb{Q}, \\ x^3, & x > 1,\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Fissato $x_0 > 1$ risulta allora

$$\lim_{x\to x_0} f\big|_{\mathbb{Q}}(x) = x_0^4, \qquad \lim_{x\to x_0} f\big|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) = x_0^3,$$

e $x_0^4 = x_0^3$ se e solo se $x_0 = 1$; concludiamo pertanto che tutti i punti $x_0 > 1$ sono punti di discontinuità di seconda specie per f.

3) Integrando per parti si ottiene

$$I := \int \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)dx = x\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) + \int \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}\,dx$$

e applicando ora la sostituzione $\sqrt{x} = t$, da cui $dx = 2t\,dt$, si ha

$$I = \int \frac{t^2}{(t+2)(t+1)}\,dt = \int \left(1 - \frac{3t+2}{(t+2)(t+1)}\right)dt = t - \int \frac{3t+2}{(t+2)(t+1)}\,dt.$$

Per risolvere l'integrale

$$J := \int \frac{3t+2}{(t+2)(t+1)}\,dt$$

utilizziamo la formula di Hermite: possiamo scrivere

$$\frac{3t+2}{(t+2)(t+1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1} = \frac{At+A+Bt+2B}{(t+2)(t+1)} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A+B=3 \\ A+2B=2, \end{cases}$$

da cui $A = 4$ e $B = -1$. Risulta dunque

$$J = 4\int \frac{dt}{t+2} - \int \frac{dt}{t+1} = 4\log|t+2| - \log|t+1| + C,$$

$C \in \mathbb{R}$, e infine

$$I = x\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) + \sqrt{x} - 4\log(\sqrt{x}+2) + \log(\sqrt{x}+1) + \bar{C},$$

$\bar{C} \in \mathbb{R}$.

VIII appello - 19 Settembre 2017

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x-4}}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)} \arctan(2x+4).$$

2) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} \frac{(x+3)^n}{\log(\sqrt{n})+3n}.$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3\tan^2 x - 2}}{\tan x \cos^2 x}\, dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto porta ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$\begin{aligned} L &:= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x-4}}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)} \arctan(2x+4) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x-4}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)} \sqrt{2x+1} \arctan(2x+4) \\ & 8 \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x-4}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)} \arctan(2x+4) \\ &= 8 \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1+1}{2x}}}{\sqrt{1+\frac{4}{2x}}+\sqrt{1-\frac{4}{2x}}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)} \arctan(2x+4) = 2\pi, \end{aligned}$$

tenendo conto del limite notevole $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e ricordando che $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

2) La serie data è a termini di segno qualunque e, posto $a_n := \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} \frac{(x+3)^n}{\log(\sqrt{n})+3n} = \frac{\left(\frac{x}{3}+1\right)^n}{\log(\sqrt{n})+3n}$, osserviamo che $a_n > 0$ per $x > -3$. Se $x = -3$ si ha $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque la serie ovviamente converge. Se $x \neq -3$ possiamo studiare la convergenza assoluta con il criterio del rapporto. Risulta

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\left(\frac{x}{3}+1\right)^{n+1}}{\log(\sqrt{n+1})+3n+3}\,\frac{\log(\sqrt{n})+3n}{\left(\frac{x}{3}+1\right)^n}\right| \\ &= \left|\frac{x}{3}+1\right|\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\log(\sqrt{n})}{n}+3}{\frac{\log(\sqrt{n+1})}{n}+3+\frac{3}{n}} = \left|\frac{x}{3}+1\right|.\end{aligned}$$

Pertanto la serie converge, dal criterio del rapporto, se $\left|\frac{x}{3}+1\right| < 1$, ovvero se $-6 < x < 0$: concludiamo dunque che la serie converge assolutamente, e dunque converge, se $-6 < x < 0$.

Se $x > 0$ la serie è a termini di segno positivo, dunque diverge, essendo assolutamente divergente.

Se $x < -6$ invece la serie è a segni alterni e risulta indeterminata, per un criterio di indeterminatezza: per quanto visto prima, infatti, $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ e dunque, per definizione di limite, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \geq \bar{n}$, $|a_{n+1}| > |a_n|$, ovvero la successione $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente crescente.

Se $x = 0$ la serie è a termini di segno positivo e diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\log(\sqrt{n})+3n},$$

essendo $a_n = \frac{1}{\log(\sqrt{n})+3n} \sim \frac{1}{n}$ ed essendo $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ divergente, la serie in tal caso diverge, per il criterio del confronto asintotico.

Se $x = -6$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\log(\sqrt{n})+3n},$$

ovvero a termini di segno alterno. Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log(\sqrt{n})+3n} = 0$ e $|a_n| = \frac{1}{\log(\sqrt{n})+3n} > \frac{1}{\log(\sqrt{n+1})+3n+3} = |a_{n+1}|$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque per il criterio di Leibniz la serie converge.

In conclusione la serie data è:

- convergente se $-6 \le x < 0$;

- divergente se $x \ge 0$;

- indeterminata se $x < -6$.

3) Effettuando la sostituzione $\tan x = t$, da cui $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, l'integrale diventa

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3\tan^2 x - 2}}{\tan x \cos^2 x}\,dx \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3t^2-2}}{t}\,dt. \end{aligned}$$

Si tratta ora di risolvere l'integrale di un differenziale binomio della forma $t^m(at^p+b)^n$, con $m=-1$, $a=3$ $b=-2$, $p=2$, $n=\frac{1}{2}$. Essendo $\frac{m+1}{p} = 0 \in \mathbb{Z}$, si può effettuare la sostituzione $3t^2-2=u^2$, da cui $t=\sqrt{\frac{u^2+2}{3}}$ e $dt = \frac{u}{\sqrt{3}\sqrt{u^2+2}}\,du$: l'integrale diventa dunque

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{7}} \frac{u^2}{u^2+2}\,du = \int_1^{\sqrt{7}} \left(1 - \frac{2}{u^2+2}\right) du = \left[u\Big|_1^{\sqrt{7}} - \int_1^{\sqrt{7}} \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,du \right] \\ &= \sqrt{7} - 1 - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\Big|_1^{\sqrt{7}} \\ &= \sqrt{7} - 1 - \sqrt{2}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Prove scritte di Analisi Matematica 1 - A.A. 2017/2018

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Elettronica

I appello - 9 Gennaio 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n^3-n+2}{n^3-2n+3}\right)^{n\log n}\right]\arctan\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right).$$

2) (a) Calcolare, in un intorno di 0, lo sviluppo in serie di McLaurin fino all'ordine 5 delle funzioni

$$f(x)=\sqrt[3]{2-\cos(x^2)}-1,\quad g(x)=\log\left(1+\frac{x^2}{2}\right).$$

(b) Calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a $g(x)$, per $x\to 0$.

(c) *(Facoltativo)* Determinare il campo di sviluppabilità di $f(x)$ e di $g(x)$.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\log 2}\frac{5e^{2x}}{e^{2x}-e^x-6}\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$
\begin{aligned}
L_1 := \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3-n+2}{n^3-2n+3}\right)^{n\log n} &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^3-2n+3}\right)^{n\log n} \\
= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{n-1}{n^3-2n+3}\right)^{\frac{n^3-2n+3}{n-1}}\right]^{\frac{n^2\log n - n\log n}{n^3-2n+3}} &= 1,
\end{aligned}
$$

utilizzando il limite notevole $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ e tenendo presente che l'ordine di infinito di $\left(n^2\log n - n\log n\right)$ è inferiore a quello di (n^3-2n+3), per $n\to+\infty$.

Inoltre

$$
L_2 := \lim_{n\to+\infty}\arctan\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\arctan\left(n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{\pi}{2},
$$

pertanto risulta

$$
\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n^3-n+2}{n^3-2n+3}\right)^{n\log n}\right]\arctan\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{\pi}{2}.
$$

2) (a) Per quanto riguarda $f(x)$, ricordando che

$$
\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad \forall x\in\mathbb{R},
$$

da cui

$$
\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + o(x^5) \;\text{ e }\; 1-\cos(x^2) = \frac{x^4}{2} + o(x^5),
$$

e che

$$
(1+x)^\alpha = 1 + \begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}\alpha\\ 2\end{pmatrix} x^2 + \dots, \quad |x|<1,
$$

si conclude che, per x sufficientemente vicino a 0,

$$
f(x) = \sqrt[3]{2-\cos(x^2)} - 1 = \Big(1+(1-\cos(x^2))\Big)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1 + \frac{1}{3}\frac{x^4}{2} + o(x^5) - 1 = \frac{x^4}{6} + o(x^5).
$$

Per quanto riguarda $g(x)$ invece, tenendo presente che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots, \quad -1 < x \leq 1,$$

risulta

$$g(x) = \log\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5),$$

in un intorno di 0.

(b) Utilizzando gli sviluppi ottenuti al punto (a) ed il principio di sostituzione degli infinitesimi, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{6}}{\left[\frac{x^2}{2}\right]^\alpha}$$

da cui, per $\alpha = 2$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[g(x)]^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{6}}{\frac{x^4}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Si conclude dunque che $f(x)$ ha ordine di infinitesimo 2 rispetto a $g(x)$, per $x \to 0$.

(c) Per quanto riguarda $f(x)$, sapendo che $\cos x$ è sviluppabile per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre $(1+x)^\alpha$ lo è se $|x| < 1$, $f(x)$ è sviluppabile in serie di McLaurin se $|1 - \cos(x^2)| < 1$, ovvero se $\cos(x^2) > 0$. Il campo di sviluppabilità di $f(x)$ è dunque dato da tutte le x tali che $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x^2 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Risolvendo questa equazione si trovano, per $k = 0$, i valori $\left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, +\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$; per $k < 0$ non ci sono soluzioni, mentre per $k > 0$ si hanno tutte le x tali che

$$\sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} < x < \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad \text{oppure} \quad -\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} < x < -\sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$

La $g(x)$ è invece sviluppabile se $-1 < \frac{x^2}{2} \leq 1$, ovvero $x^2 \leq 2$: il campo di sviluppabilità di $g(x)$ è dunque $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

3) Effettuando la sostituzione $t = e^x$, da cui $dt = e^x\,dx$, l'integrale diventa

$$I := \int_0^{\log 2} \frac{5e^{2x}}{e^{2x} - e^x - 6}\,dx = \int_1^2 \frac{5t}{t^2 - t - 6}\,dt = \int_1^2 \frac{5t}{(t-3)(t+2)}\,dt.$$

Utilizziamo ora la formula di Hermite: risulta

$$\frac{5t}{(t-3)(t+2)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t+2} = \frac{At + 2A + Bt - 3B}{(t-3)(t+2)}$$

se e solo se $\begin{cases} A + B = 5, \\ 2A - 3B = 0 \end{cases}$ da cui $A = 3$ e $B = 2$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{5t}{(t-3)(t+2)} &= \int_1^2 \frac{3}{t-3}\,dt + \int_1^2 \frac{2}{t+2}\,dt \\ &= \Big[3\log|t-3| + 2\log|t+2|\Big]_1^2 = \log 2 - 2\log 3. \end{aligned}$$

II appello - 23 Gennaio 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2^{\tan\left(\frac{2}{x^2+2}\right)}-\cos\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\right](2x+1).$$

2) Dato l'insieme

$$A=[-2,-1]\cup\left\{\frac{3n}{n+3},\ n=1,2,\dots\right\},$$

si chiede di

(a) determinare $Is(A)$, A', $A'':=(A')'$, $\overline{A}$, A°, $Fr(A)$;

(b) stabilire se A è chiuso, aperto, limitato, compatto, connesso.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\log\left(1+\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$
\begin{aligned}
L := &\lim_{x\to+\infty}\left[2^{\tan\left(\frac{2}{x^2+2}\right)}-\cos(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})\right](2x+1)\\
= &\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2^{\tan\left(\frac{2}{x^2+2}\right)}-1}{\tan\left(\frac{2}{x^2+2}\right)}\frac{\tan\left(\frac{2}{x^2+2}\right)}{\frac{2}{x^2+2}}\frac{2(2x+1)}{x^2+2}+\right.\\
&\left.+\left(1-\cos\left(\frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}\right)\right)(2x+1)\right]\\
= &\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2^{\tan\left(\frac{2}{x^2+2}\right)}-1}{\tan\left(\frac{2}{x^2+2}\right)}\frac{\tan\left(\frac{2}{x^2+2}\right)}{\frac{2}{x^2+2}}\frac{2(2x+1)}{x^2+2}+\right.\\
&\left.+\frac{1-\cos\left(\frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}\right)}{\frac{16}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}}\frac{16(2x+1)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}\right].
\end{aligned}
$$

Pertanto, utilizzando i limiti notevoli $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\log 2$ e $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$, e tenendo presente che

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{16(2x+1)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{32x+16}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)^2}=8
$$

e che

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{2(2x+1)}{x^2+2}=0,
$$

si conclude che $L=4$.

2) Poniamo $a_n:=\frac{3n}{n+3}$, $n=1,2,\ldots$.

(a) Risulta $Is(A)=\{a_n,\ n=1,2,\ldots\}$. Fissato infatti $n\in\mathbb{N}$, è sufficiente scegliere

$$
0<r<\min\{|a_n-a_{n+1}|,|a_n-a_{n-1}|\}=a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)}{n+4}-\frac{3n}{n+3}=\frac{9}{(n+3)(n+4)}
$$

per avere $B(a_n, r) \cap A = \{a_n\}$.

Risulta poi $A' = [-2, -1] \cup \{3\}$. Proviamo che $3 \in A'$. Fissato $r > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in B(3, r)$, da cui $B(3, r) \cap A \setminus \{3\} \neq \emptyset$: infatti per avere $|a_n - 3| = \left|\frac{3n}{n+3} - 3\right| = \frac{9}{n+3} < r$, basta scegliere $n > \frac{9}{r} - 3$. Di conseguenza abbiamo che $A'' = [-2, -1]$.

Si ha poi $\overline{A} = A' \cup Is(A) = A \cup \{3\}$ e $A^\circ =]-2, -1[$, poiché soltanto per i punti dell'intervallo aperto $]-2, -1[$ è verificata la proprietà che esiste una boccia centrata nel punto e tutta contenuta dentro l'insieme A.

Infine, tenendo conto del fatto che tutti i punti isolati sono anche di frontiera, che il punto 3 è di frontiera (poiché per ogni $r > 0$, $B(3, r) \cap A \neq \emptyset$ e $B(3, r) \cap A^c \neq \emptyset$) e che i punti -2 e -1 sono di frontiera per $[-2, -1]$, si conclude che $\mathrm{Fr}(A) = \{-2, -1, 3\} \cup \{a_n,\ n = 1, 2, \dots\}$.

(b) L'insieme A non è chiuso, in quanto $\overline{A} \neq A$, e dunque non è compatto; non è nemmeno aperto, essendo $A^\circ \neq A$. A è invece limitato, essendo ad esempio $A \subset [-2, 3]$. L'insieme, infine, non è connesso: basta infatti considerare, ad esempio, $B =]-3, 0[$, $C =]0, 3[$ per avere

- $(B \cap A) \neq \emptyset, \quad (C \cap A) \neq \emptyset$,
- $(B \cap A) \cap (C \cap A) = \emptyset$,
- $(B \cap A) \cup (C \cap A) = A$.

3) Effettuando la sostituzione $t = \tan x$, da cui $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, l'integrale diventa

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \log\left(1 + \frac{1}{1 + \tan^2 x}\right) dx = \int_0^1 \log\left(1 + \frac{1}{1 + t^2}\right) dt.$$

Utilizzando ora il procedimento di integrazione per parti,

$$I = \left[t \log \left(1 + \frac{1}{1+t^2} \right) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2t^2}{(t^2+1)(t^2+2)} \, dt.$$

Per risolvere l'ultimo integrale utilizziamo la formula di Hermite. Risulta

$$\frac{2t^2}{(t^2+1)(t^2+2)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+2} = \frac{At^3 + 2At + Bt^2 + 2B + Ct^3 + Ct + Dt^2 + D}{(t^2+1)(t^2+2)}$$

se e solo se $\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 2 \\ 2A + C = 0 \\ 2B + D = 0 \end{cases}$ da cui $A = C = 0$, $B = -2$ e $D = 4$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2t^2}{(t^2+1)(t^2+2)} \, dt &= -2 \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} \, dt + 4 \int_0^1 \frac{1}{t^2+2} \, dt \\ &= -2[\arctan t]_0^1 + 2\sqrt{2} \left[\arctan \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^1 \\ &= -\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

da cui infine

$$I = \log \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

III appello - 6 Febbraio 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{1-\cos(x^2-4)}{\tan^2(x-2)}\right]^{\frac{\sin(x-2)}{(x-2)^3}}.$$

2) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}{n\arctan(n)}(16x^3-1)^{3n+1}.$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\sin^2 x}\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Osserviamo tuttavia che

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos(x^2-4)}{\tan^2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos(x^2-4)}{(x^2-4)^2}\frac{(x-2)^2}{\tan^2(x-2)}(x+2)^2=8,$$

dal momento che $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$, mentre

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty,$$

tenendo presente che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Pertanto si conclude che

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{1-\cos(x^2-4)}{\tan^2(x-2)}\right]^{\dfrac{\sin(x-2)}{(x-2)^3}}=+\infty.$$

2) La serie data è a termini di segno qualunque.

Posto $a_n:=\frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}{n\arctan n}(16x^3-1)^{3n+1}$, $n=1,2,\dots$, se $x^3=\frac{1}{16}$, ovvero $x=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$, diventa $a_n\equiv 0$, per ogni $n\in\mathbb{N}$, dunque la serie ovviamente converge. Se $x\neq\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ studiamo la convergenza assoluta, utilizzando il criterio del rapporto: poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}}\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}+1}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}\frac{n}{n+1}\frac{\arctan n}{\arctan(n+1)}\frac{(16x^3-1)^{3(n+1)+1}}{(16x^3-1)^{3n+1}}\right|$$

$$=|16x^3-1|^3,$$

la serie converge assolutamente, e dunque converge, se $|16x^3+1|^3<1$: tale disequazione é verificata se $-1<16x^3-1<1$, ovvero per $0<x^3<\frac{1}{8}$, da cui $0<x<\frac{1}{2}$. La serie é dunque convergente in $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

Se $x>\frac{1}{2}$ la serie è a termini di segno positivo, dunque diverge in quanto diverge assolutamente, per quanto visto prima.

Se $x < 0$ la serie é a termini di segno alterno ed é indeterminata, per un criterio di indeterminatezza: infatti, per quanto visto prima, in tal caso si ha $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |16x^3-1|^3 > 1$ da cui, per definizione di limite, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n+1}| > |a_n|$, per ogni $n \geq \bar{n}$, ovvero $(|a_n|)_n$ é definitivamente crescente.

Se $x = \frac{1}{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}{n\arctan(n)}:$$

osserviamo che $a_n \sim b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, in quanto

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\arctan(n)}\frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{\pi}$$

e quindi, poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è convergente, la serie data converge, dal criterio del confronto asintotico.

Infine se $x = 0$ al serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{3n+1}\frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}{n\arctan(n)}$$

ed é a termini di segno alterno. Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}{n\arctan(n)} = 0$ e la successione $(|a_n|) = \left(\frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}{n\arctan(n)}\right)_n$ è decrescente: infatti

$$|a_{n+1}| = \frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)}{(n+1)\arctan(n+1)} < |a_n| = \frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}{n\arctan(n)}$$

è equivalente alla disequazione

$$\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)n\arctan(n) < (n+1)\arctan(n+1)\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$$

la quale, per la monotonia delle funzioni arcotangente su $\mathbb{R}$ e tangente in $[0, 1/2]$, è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$. Pertanto la serie in tal caso converge, dal criterio di Leibnitz.

In conclusione la serie data converge se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, diverge se $x > \frac{1}{2}$, é indeterminata se $x < 0$.

3) Ponendo $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, da cui $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, l'integrale diventa

$$I := \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \sin^2 x}\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{t^2+1}{t(t+1)^2}\,dt.$$

Utilizziamo ora la formula di Hermite. Risulta

$$\frac{t^2+1}{t(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$$

se e solo se

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

da cui $A = 1$, $B = 0$ e $C = -2$. Pertanto

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{t}\,dt - 2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt \\ &= [\log t]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} + \left[\frac{2}{t+1}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \log(\sqrt{3}) + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}. \end{aligned}$$

IV appello - 5 Giugno 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{2+\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}}.$$

2) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{2-x}}{x^2 - 1},$$

tracciandone un grafico approssimativo (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^4 \left(\sqrt{\frac{x-1}{x^3}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto del limite dato porta ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$L := \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{2+\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2+\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\ln(\sin x)}.$$

Calcoliamo pertanto separatamente il limite

$$L_1 := \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2+\sin x}{\sqrt{1-\sin x}} \ln(\sin x).$$

Utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ risulta

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\Big(1+(\sin x-1)\Big)}{\sin x - 1} \frac{\sin x - 1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}(2+\sin x) \\ &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\Big(1+(\sin x-1)\Big)}{\sin x - 1} \frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}(2+\sin x) = 0, \end{aligned}$$

poiché $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2+\sin x}{\sqrt{1+\sin x}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ e $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin x} = 0$. Pertanto si conclude che $L = 1$.

2) La funzione data è ben definita per ogni $x \neq \pm 1$, per cui il dominio è $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Osserviamo che la funzione f non presenta simmetrie. Per quanto riguarda la positività, si ha $f(x) > 0$ se e solo se $x^2 - 1 > 0$, ovvero se $x > 1$ oppure $x < -1$, mentre $f(x) < 0$ se $-1 < x < 1$. Essendo $f(x) \neq 0$, per ogni $x \in D(f)$, il grafico di f non interseca l'asse x, mentre interseca l'asse y nel punto $(0, -e^2)$.

Studiamo gli eventuali asintoti. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2-x}}{x^2-1} = 0,$$

l'asse x è un asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$; risulta invece

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2-x}}{x^2-1} = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2-x}}{x^3-x}=-\infty,$$

da cui non ci sono asintoti orizzontali, né obliqui, per $x\to-\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{2-x}}{x^2-1}=+\infty=\lim_{x\to-1^-}f(x),$$

mentre

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{2-x}}{x^2-1}=-\infty=\lim_{x\to-1^+}f(x),$$

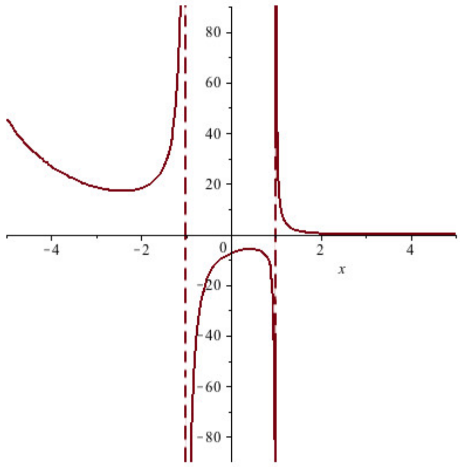
da cui le rette $x=-1$ e $x=1$ sono asintoti verticali per f sia da destra che da sinistra.

La funzione $f(x)$ è continua e derivabile in $D(f)$ e risulta

$$f'(x)=\frac{e^{2-x}}{(x^2-1)^2}(1-x^2-2x):$$

essendo, per ogni $x\in D(f)$, $\frac{e^{2-x}}{(x^2-1)^2}>0$, risulta $f'(x)>0$ se e solo se $(1-x^2-2x)>0$, $x\in D(f)$: pertanto la funzione risulta decrescente in $(-\infty,-1-\sqrt{2}]$, in $[-1+\sqrt{2},1[$ e in $]1,+\infty)$, mentre è crescente in $[-1-\sqrt{2},-1[$ e in $]-1,-1+\sqrt{2}]$. Il punto $-1-\sqrt{2}$ è dunque di minimo relativo, mentre $-1+\sqrt{2}$ è di massimo relativo: ovviamente non ci sono punti di massimo, né di minimo assoluti in quanto la funzione non è limitata superiormente, né inferiormente.

Si può dunque tracciare il seguente grafico approssimativo:



3) Utilizzando la linearità dell'integrale risulta

$$I := \int_1^4 \left(\sqrt{\frac{x-1}{x^3}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{x-1}{x^3}}\, dx - \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x+2}}\, dx$$
$$= J - 2[\sqrt{x+2}]_1^4 = J - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$$

Calcoliamo ora $J := \int_1^4 \sqrt{\frac{x-1}{x^3}}\, dx$. Si tratta dell'integrale di un differenziale binomio del tipo $x^m(ax^p+b)^n$, con $m = -\frac{3}{2}$, $a = 1$ $b = -1$, $p = 1$, $n = \frac{1}{2}$. Essendo $\frac{m+1}{p} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, mentre $\frac{m+1}{p} + n = 0 \in \mathbb{Z}$, si può effettuare la sostituzione $1 - x^{-1} = y^2$, da cui $x = \frac{1}{1-y^2}$ e $dx = \frac{2y}{(1-y^2)^2}\, dy$. L'integrale pertanto diventa

$$J = \int_1^4 \sqrt{\frac{x-1}{x^3}}\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2y^2}{1-y^2}\, dy = -2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1 + \frac{1}{y^2-1}\right) dy$$
$$= -\sqrt{3} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{y-1}\, dy + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{y+1}\, dy = -\sqrt{3} - \left[\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$= -\sqrt{3} - \log\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3} + \log(7 + 4\sqrt{3}),$$

da cui infine $I = \log(7+4\sqrt{3}) - 2\sqrt{6} + \sqrt{3}$.

V appello - 19 Giugno 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x-2|}, & x \geq 0, \\ \\ \cos(2x), & x < 0. \end{cases}$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int x \arctan\left(1 - \frac{1}{x}\right) \, dx.$$

Svolgimento

1) Osserviamo che si può scrivere

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2}, & x \geq 2, \\ e^{2-x}, & 0 \leq x < 2, \\ \cos(2x), & x < 0. \end{cases}$$

La funzione data è senz'altro continua per ogni $x \neq 0$, essendo composizione, somma e prodotto di funzioni continue. Nel punto $x = 0$ invece si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{2-x} = e^2 = f(0)$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \cos(2x) = 1,$$

da cui f non è continua in $x = 0$: pertanto la funzione è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Per quanto riguarda la derivabilità, la funzione è derivabile per ogni $x \neq 0, 2$, essendo composizione, somma e prodotto di funzioni derivabili. Non essendo continua, non è certamente derivabile nel punto $x = 0$, Nemmeno nel punto $x = 2$ è derivabile in quanto

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2} = 1,$$

mentre

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = -1.$$

Si ha infine

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-2}, & x > 2, \\ \\ -e^{2-x}, & 0 < x < 2, \\ \\ -2\sin(2x), & x < 0. \end{cases}$$

2) Utilizzando il procedimento di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} I &:= \frac{x^2}{2}\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{2x^2-2x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\int \left(1+\frac{2x-1}{2x^2-2x+1}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\ln|2x^2-2x+1| + C, \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

VI appello - 3 Luglio 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Date le funzioni

$$f(x) = \ln(1 + 3x^2\sqrt{x}) + e^{2x^2} - 1 + x\tan(3\sqrt{x}),$$

$$g(x) = \sqrt{x}\sin(5\sqrt[4]{x})$$

si chiede di

a) determinare l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a $g(x)$, per $x \to 0^+$,

b) calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

2) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + 2x)^n \big(e^{\frac{1}{2n^2}} - 1\big).$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\ln(t^2 + 9)}{t^4}\, dt.$$

Svolgimento

1) Per quanto riguarda la parte a), la funzione $f(x)$ è somma di tre infinitesimi, per $x \to 0^+$: $\ln(1+3x^2\sqrt{x})$ ha ordine $\frac{5}{2}$ rispetto a x, per $x \to 0^+$, $e^{2x^2}-1$ ha ordine 2, mentre $x\tan(3\sqrt{x})$ ha ordine $\frac{3}{2}$. Pertanto l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ è $\frac{3}{2}$, per $x \to 0^+$. Poiché la funzione $g(x)$ ha ordine $\frac{3}{4}$ rispetto a x, per $x \to 0^+$, per il principio di sostituzione degli infinitesimi risulta, per $\alpha = 2$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\tan(3\sqrt{x})}{[\sqrt{x}\sin(5\sqrt[4]{x})]^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(3\sqrt{x})}{\sin^2(5\sqrt[4]{x})}$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(3\sqrt{x})}{3\sqrt{x}} \frac{3\sqrt{x}}{25\sqrt{x}} \left(\frac{5\sqrt[4]{x}}{\sin(5\sqrt[4]{x})}\right)^2 = \frac{3}{25}.$$

Pertanto l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a $g(x)$, per $x \to 0^+$, è 2. Per quanto riguarda la parte b), per quanto visto al punto precedente, dalla teoria sugli infinitesimi risulta immediatamente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

2) La serie data è a termini di segno qualunque: in particolare è a termini di segno positivo per $x > -\frac{1}{2}$, alterno per $x < -\frac{1}{2}$.

Posto $a_n := (1+2x)^n\big(e^{\frac{1}{2n^2}}-1\big)$, $n = 1, 2, \ldots$, se $x = -\frac{1}{2}$, si ha $a_n \equiv 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui la serie ovviamente converge. Se $x \neq -\frac{1}{2}$ studiamo la convergenza assoluta, utilizzando il criterio del rapporto: poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(1+2x)^{n+1}\big(e^{\frac{1}{2(n+1)^2}}-1\big)}{(1+2x)^n\big(e^{\frac{1}{2n^2}}-1\big)}\right|$$
$$= |1+2x| \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{e^{\frac{1}{2(n+1)^2}}-1}{\frac{1}{2(n+1)^2}} \frac{2n^2}{2(n+1)^2} \frac{\frac{1}{2n^2}}{e^{\frac{1}{2n^2}}-1}\right| = |1+2x|,$$

la serie converge assolutamente, e dunque converge, se $|1+2x| < 1$, ovvero se $-1 < x < 0$.

Se $x > 0$ la serie è a termini di segno positivo, dunque diverge poiché, per quanto visto prima, diverge assolutamente.

Se $x < -1$ la serie é a termini di segno alterno e si può dimostrare che risulta in tal caso indeterminata, per un criterio di indeterminatezza: infatti, per quanto visto prima, si ha $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |1+2x| > 1$ da cui, per definizione di limite, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n+1}| > |a_n|$, per ogni $n \geq \bar{n}$, ovvero $(|a_n|)_n$ é definitivamente crescente.

Se $x = 0$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{2n^2}} - 1\right):$$

é a termini di segno positivo e si può osservare che $a_n = \left(e^{\frac{1}{2n^2}} - 1\right) \sim \frac{1}{n^2}$, per cui la serie converge, dal criterio del confronto asintotico, dal momento che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ è convergente.

Infine se $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{2n^2}} - 1\right):$$

è a termini di segno alterno e, per il criterio di Leibnitz, converge in quanto $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{2n^2}} - 1\right) = 0$ e $|a_{n+1}| = \left(e^{\frac{1}{2(n+1)^2}} - 1\right) < |a_n| = \left(e^{\frac{1}{2n^2}} - 1\right)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In conclusione la serie data converge se $-1 \leq x \leq 0$, diverge se $x > 0$, é indeterminata se $x < -1$.

3) Utilizzando il procedimento di integrazione per parti l'integrale diventa

$$I := \int \frac{\ln(t^2+9)}{t^4}\,dt = -\frac{\ln(t^2+9)}{3t^3} + \frac{2}{3}\int \frac{1}{t^2(t^2+9)}\,dt.$$

Per risolvere l'integrale $J := \int \frac{1}{t^2(t^2+9)}\,dt$ usiamo la formula di Hermite: risulta

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+9} = \frac{At^3 + 9At + Bt^2 + 9B + Ct^3 + Dt^2}{t^2(t^2+9)} = \frac{1}{t^2(t^2+9)}$$

se e solo se

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ 9A = 0 \\ 9B = 1 \end{cases}$$

da cui $A = C = 0$, $B = \frac{1}{9}$, $D = -\frac{1}{9}$. Pertanto

$$J = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^2+9} = -\frac{1}{9t} - \frac{1}{81}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1} = -\frac{1}{9t} - \frac{3}{81}\arctan\left(\frac{t}{3}\right) + C,$$

da cui infine

$$I = -\frac{\ln(t^2+9)}{3t^3} - \frac{2}{27t} - \frac{2}{81}\arctan\left(\frac{t}{3}\right) + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$.

VII appello - 4 Settembre 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to -1} \frac{e^{(x+1)^2}-1}{(x^2-1)[\log(x+2)+\sin(4x+4)]}.$$

2) Data la funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita come:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x=\dfrac{3}{n+2},\ n=1,2,\dots, \\ e^x, & x\geq 0,\ x\neq\dfrac{3}{n+2},\ n=1,2,\dots, \\ x+1, & x<0,\ x\in\mathbb{Q}, \\ x^3+1, & x<0,\ x\notin\mathbb{Q}, \end{cases}$$

si chiede di determinare i punti di continuità di f, classificandone le eventuali discontinuità.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\cos t(1-2\sin^2 t)}{(\sin^2 t+5)(\sin t-1)}\,dt.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto porta ad una forma indeterminata, ma si ha

$$
\begin{aligned}
L &:= \lim_{x\to-1} \frac{e^{(x+1)^2}-1}{(x^2-1)[\log(x+2)+\sin(4x+4)]} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{e^{(x+1)^2}-1}{(x+1)^2}\frac{(x+1)^2}{x^2-1}\frac{1}{\log(x+2)+\sin(4x+4)} \\
&= \lim_{x\to-1} \frac{e^{(x+1)^2}-1}{(x+1)^2}\frac{1}{x-1}\frac{1}{\frac{\log(1+(x+1))}{x+1}+4\frac{\sin(4x+4)}{4x+4}} = -\frac{1}{10},
\end{aligned}
$$

tenendo presenti i limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$.

2) Poniamo $a_n=\dfrac{3}{n+2}$, $n=1,2,\dots$ e $A=\Big\{a_n,\ n=1,2,\dots\Big\}$.

Studiamo dapprima i punti $a_n\in A$. Fissato $n\in\mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{x\to a_n} f(x)=\lim_{x\to\frac{3}{n+2}} e^x = e^{\frac{3}{n+2}},$$

mentre $f\left(\dfrac{3}{n+2}\right)=1$: essendo $e^{\frac{3}{n+2}}\neq 1$, per ogni $n=1,2,\dots$, i punti a_n sono punti di discontinuità di prima specie eliminabile per f. I punti $x>0$, $x\neq a_n$, sono invece di continuità per f.

Per quanto riguarda il punto $x=0$, essendo $0\in A'$ si ha

$$\lim_{x\to0^+} f\big|_A(x)=\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{3}{n+2}\right)=1, \qquad \lim_{x\to0^+} f\big|_{A^c}(x)=\lim_{x\to0^+,x\notin A} e^x=1,$$

$$\lim_{x\to0^-} f\big|_{\mathbb{Q}}(x)=\lim_{x\to0^-,x\in\mathbb{Q}}(x+1)=1, \qquad \lim_{x\to0^-} f\big|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)=\lim_{x\to0^-,x\notin\mathbb{Q}}(x^3+1)=1,$$

ovvero $\lim_{x\to0^+} f(x)=1=\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$, da cui 0 è un punto di continuità per f.

Sui punti $x<0$ $f(x)$ segue una legge di tipo Dirichlet, in quanto

$$f(x)=\begin{cases}(x+1), & x<0,\ x\in\mathbb{Q},\\[2ex] (x^3+1), & x<0,\ x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Poiché, fissato $\overline{x} < 0$, si ha

$$\lim_{x\to\overline{x}} f\big|_{\mathbb{Q}}(x) = (\overline{x}+1) \qquad \lim_{x\to\overline{x}} f\big|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) = (\overline{x}^3+1),$$

e $(\overline{x}+1) = (\overline{x}^3+1)$ se e solo se $\overline{x} = -1$, il punto $\overline{x} = -1$ è di continuità per f, mentre tutti i punti $\overline{x} < 0$, $\overline{x} \neq -1$, sono di discontinuità di seconda specie.

3) Operando la sostituzione $x = \sin t$, da cui $dx = \cos t\, dt$, l'integrale diventa

$$I := \int \frac{\cos t(1-2\sin^2 t)}{(\sin^2 t+5)(\sin t-1)}\,dt = \int \frac{1-2x^2}{(x^2+5)(x-1)}\,dx.$$

Utilizzando ora la formula di Hermite risulta

$$\frac{1-2x^2}{(x^2+5)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2+5C}{(x^2+5)(x-1)}$$

se e solo se

$$\begin{cases} A+C=-2 \\ -A+B=0 \\ -B+5C=1 \end{cases}$$

da cui $A = B = -\frac{11}{6}$, $C = -\frac{1}{6}$. Pertanto

$$\begin{aligned} I &= -\frac{11}{6}\int \frac{x+1}{x^2+5}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1} \\ &= -\frac{11}{12}\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx - \frac{11}{30}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,dx - \frac{1}{6}\log|x-1| \\ &= -\frac{11}{12}\log(x^2+5) - \frac{11}{30}\sqrt{5}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{6}\log|x-1| + C, \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$, da cui infine

$$I = -\frac{11}{12}\log(\sin^2 t+5) - \frac{11}{30}\sqrt{5}\arctan\left(\frac{\sin t}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{6}\log|\sin t-1| + C.$$

VIII appello - 13 Settembre 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{4x^4+1}-\sqrt{4x^4-1}}.$$

2) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (3x+1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right).$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x(2+e^x)}\, dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Osserviamo tuttavia che

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{4x^4+1}-\sqrt{4x^4-1}} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2}(\sqrt{4x^4+1}+\sqrt{4x^4-1}) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} 2\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{4x^4}}\right) = 1,
\end{aligned}$$

tenendo presente che $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

2) La serie data è a termini di segno qualunque.

Posto $a_n := (3x+1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, se $x = -\frac{1}{3}$, diventa $a_n \equiv 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque la serie ovviamente converge. Se $x \neq -\frac{1}{3}$ studiamo la convergenza assoluta, utilizzando il criterio del rapporto: poiché

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(3x+1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)}{(3x+1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)} \right| \\
&= |3x+1| \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}+1} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)} = |3x+1|,
\end{aligned}$$

la serie converge assolutamente, e dunque converge, se $|3x+1| < 1$, ovvero per $-\frac{2}{3} < x < 0$.

Se $x > 0$ la serie è a termini di segno positivo, dunque diverge in quanto diverge assolutamente, per quanto visto prima.

Se $x < -\frac{2}{3}$ la serie é a termini di segno alterno ed é indeterminata, per un criterio di indeterminatezza: infatti, per quanto visto prima, in tal caso si ha

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |3x+1| > 1$ da cui, per definizione di limite, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n+1}| > |a_n|$, per ogni $n \geq \bar{n}$, ovvero $(|a_n|)_n$ é definitivamente crescente.

Se $x = -\frac{2}{3}$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$$

ed é a termini di segno alterno. Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) = 0$ e che la successione $(|a_n|) = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)\right)_n$ è decrescente: infatti,

$$|a_{n+1}| = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right) < |a_n| = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$$

è equivalente (per la monotonia della funzione seno in $[0,1]$, ad esempio) alla disequazione

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

la quale è verificata per ogni $n \geq 0$. Pertanto la serie in tal caso converge, dal criterio di Leibnitz.

Infine se $x = 0$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$$

ed è a termini di segno positivo. Osserviamo che, ad esempio, $a_n \sim b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, e quindi, poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ è divergente, la serie data diverge, dal criterio del confronto asintotico.

In conclusione la serie data converge se $-\frac{2}{3} \leq x < 0$, diverge se $x \geq 0$, é indeterminata se $x < -\frac{2}{3}$.

3) Ponendo $t = e^x$, da cui $x = \ln t$ e $dx = \frac{dt}{t}$, l'integrale diventa

$$I := \int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x(2+e^x)}\,dx = \int_1^e \frac{t^2-1}{t^2(2+t)}\,dt = \int_1^e \frac{1}{2+t}\,dt - \int_1^e \frac{1}{t^2(2+t)}\,dt$$

da cui

$$I = \ln(2+t)\Big|_1^e - \int_0^e \frac{1}{t^2(2+t)}\, dt = \ln(2+e) - \ln 3 - J.$$

Per calcolare J utilizziamo ora la formula di Hermite. Risulta

$$\frac{1}{t^2(2+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{2+t}$$

se e solo se

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}$$

da cui $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ e $C = \frac{1}{4}$. Pertanto

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e \left(-\frac{1}{4t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4(2+t)} \right) dt = -\frac{1}{4} \ln t\Big|_1^e - \frac{1}{2t}\Big|_1^e + \frac{1}{4}\ln(2+t)\Big|_1^e \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+e) - \frac{1}{4}\ln 3, \end{aligned}$$

da cui infine

$$I = \frac{3}{4}\ln(2+e) - \frac{3}{4}\ln 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2e}.$$